TIDSKRIFT
FÖR
ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

1931

TIDSKRIFT

FÖR

ELEMENTÄR MATEMATIK FYSIK OCH KEMI

UTGIVEN AV

C. E. BLOM, C. O. G. BORELIUS,
J. S. HEDSTRÖM, G. STARCK

FJORTONDE ÅRGÅNGEN

1931

STOCKHOLM

REDAKTION OCH EXPEDITION: KARLBERGSVÄGEN 16IV

LUND
HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI 1931

Fjortonde årgångens innehåll.

Sid.

ANDERSSON, J. Anm. av *K. G. Hagstroem*, Sagan om de tio tecknen 234
AURÉN, T. E. De fotoelektriska cellerna 214
— — Anm. av *R. W. Pohl*, Mechanik und Akustik 36
BECKMAN, ANNA. Anm. av *J. W. N. Sullivan*, Från Kopernikus till Einstein 103
BENNER, S. Anm. av Kosmos Bd 8 37
— — Über die Eigenschwingung freier Elektronen in einem konstanten Magnetfeld (ref. av gradualavh.) 176
BODLUND, C. En not till heltalsteorien 229
BORELIUS, G. Tekniska Högskolans nya fysikinstitut 30
— — Anm. av *Chalmers Tekniska Institut* 1829—1929 105
BÅGMAN, S. Trigonometriska formlers härledning 232
— — Anm. av *Albin Zachrison*, Exempel till funktionsläran och analytiska geometrien och av *D. Fog* og *Fr. Fabricius-Bjerre*, Matematiske opgaver 176
BÄCKSTRÖM, H. Projektionsapparaternas verkningssätt 145
EDQVIST, T. Varför sjunga telefontrådarna? 86
ENSKOG, D. Anm. av Forhandlinger ved den syvende skandinaviske matematikerkongress i Oslo 1929 104
FRIMAN, E. Anm. av *S. Eriksson*, Lärobok i matematik för tekniska läroverk Del II 108
GUNNESON, F. Bestämning av konstanten i Joules lag med en kalorimeter av massiv koppar 163
GUSTAVER, B. Ett experiment till belysning av Avogadro's lag 225
GÖRANSSON, E. Sannolikhetsräkning på empirisk grundval (forts.)
2. Teorien för observationsfel. 3. Den normala sannolikhetsfunktionen 7
4. Frekvenskurvor 65
5. Samvariation. 6. Livförsäkring 129, 199
HALLÉN, E. Über die elektrischen Schwingungen in drahtförmigen Leitern (ref. av gradualavh.) 115
HERLIN, E. Anm. av *I. Sefve*, Liv och materia 39
— — Anm. av *Hj. Berg*, Fredlig bragd 105
— — Anm. av *Från kunskapens fält* 171
— — Anm. av *Kunskap*, Universitet för alla 173

Hägglund, E. Nobelpriset i kemi 1931 220
Jenvall, A. Anm. av läroböcker i astronomi av *Hellsten, Lundahl, Malmborg, Hjalmar;* stjärnkarta av *Roth* och *Ledeboer* 174
Leide, A. En enkel metod att demonstrera vågrörelse 231
Lundblad, R. Fysikaliska problem 187
Lundquist, O. Experimentelle Studien über das K-Röntgenemissionsspektrum des Schwefels (ref. av gradualavh.) 240
Löwenhamn, E. Anm. av *I. Bolin* och *B. Gustaver*, Lärobok i kemi för folkskoleseminarier och praktiska skolor 41
— — Anm. av *K. Parck*, Lärobok i kemi för realskolan 110
Nilsson, R. Studien über den enzymatischen Kohlenhydratabbau (ref. av gradualavh.) 44
Nyström, Bengt E. Om en matematisk studentuppgift 165
— — Anm. av *E. Foghammar*, Räknelära för realskolor och *A. Winberg*, Lärobok i matematik för 4-åriga realskolor 106
— — Anm. av *Berg-Hagström-Hjalmar*, Räknelära 171
Petrini, H. Sannolikhetsräkning och allmänbildning 77
Ramstedt, Eva, Anm. av *G. Brochmann*, De store opfinnelser, Bd I—VI 235
Starck, G. 1930 års Nobelpristagare i fysik 1
— — Praktiska atomvikter 1931 35
— — Uppgifter för de obligatoriska laborationsövningarna och det enskilda arbetet i kemi 96, 159
— — Anm. av *G. Angel*, Elektrokemi 112
— — Anm. av *H. Bohlin*, Gaslagarna, *Autenrieth-Rojahn*, Quantitative chemische Analyse, *L. Medicus*, Technisch-chemische Analyse 239
Söderborg, B. Om enskilt arbete 151
Tegnér, H. »Katt och råtta» 193
Teorell, T. Anm. av *I. Bolin*, Det levande livets kemi 113
Thorén, F. Zur Kenntnis der katalytischen Zersetzung von Wasserstoffsuperoxyd mit kolloidalem Platin. (ref. av gradualavh.) 45
Wahlgren, A. Den regelbundna sjuttonhörningen 22
Wahlgren, M. Anm. av *E. Wetterwik*, Matematiska uppgifter i realskolexamina 1907—1930 169
Wetterblad, T. Ljusets brytning i gaser 101
— — Fysikaliska uppgifter 187
— — Anm. av *E. Herlin*, Elektricitet till husbehov 38
— — Anm. av *E. Hjalmar*, Lärobok i fysik för realskolor 109
Östman, C. J. En ny vindmätare 166

Avhandlingar och uppsatser i läroverkens årsredogörelser 1929—30 och 1930—31 ..... 46, 180

Föreläsningar för lärarkandidaterna vid provårsläroverken 1929—30 och 1930—31 ..... 46, 179
Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna h. t. 1930, v. t. 1931 och h. t. 1931 ..... 60, 122, 250
Provräkning i realskolexamen h. t. 1930, v. t. 1931 och h. t. 1931 ..... 64, 127, 255
Problemavdelning: Matematiska uppgifter (red. av S. Bågman) ... 50, 117, 183, 243
— —: Fysikaliska uppgifter (förf. av R. Lundblad och T. Wetterblad) 187
— —: Resultat av 1930 års pristävlan 54
— —: Pristävlingsuppgifter 1931 248
Gradualavhandlingar (autoreferat): Ragnar Nilsson (44), Fritz Thorén (45), Erik Hallén (115), Sven Benner (176), Osvald Lundquist (240)
Kataloger, referat av nyheter 182, 241
Översikt av innehållet i följande tidskrifter: Populär astronomisk tidskrift, Svensk kemisk tidskrift, Vetenskapen och livet, Era, Industritidningen Norden, Radioamatören, Radio och Grammofon, Matematisk Tidsskrift (København), Fysisk Tidsskrift (København), Norsk Matematisk Tidsskrift (Oslo), Den Høiere Skole (Oslo) 47, 180
Bokanmälningar: Pohl, Einführung in die Physik, Mechanik und Akustik; Kosmos, Fysiska uppsatser; Herlin, Elektricitet till husbehov; Liv och materia, Läsebok utg. av I. Sefve; Bolin-Gustaver, Kemi för folkskoleseminarier och praktiska skolor 36
Sullivan, Från Kopernikus till Einstein; Den syvende skandinaviske matematikerkongress i Oslo 1929; Chalmers Tekniska Institut 1829—1929; Berg, Fredlig bragd; Foghammar, Räknelära för realskolor etc. och Winberg, Lärobok i matematik för realskolor etc.; Eriksson, Lärobok i matematik för tekniska läroverk; Hjalmar, Lärobok i fysik för realskolor etc.; Parck, Lärobok i kemi för realskolan; Angel, Elektrokemi; Bolin, Det levande livets kemi 103
Wettervik, Matematiska realskoleuppgifter; Berg—Hagström, Räknelära, omarb. av E. Hjalmar; Bokserien »Från kunskapens fält»; »Kunskap», Universitet för alla; Läroböcker i astronomi av Hellsten, Lundahl, Malmborg, Hjalmar; Roth—Ledeboer, Stjärnkarta; Zachrison, Exempel till funktionsläran och analytiska geometrien; Fog og Fabricius-Bjerre, Matematiske opgaver 169

HAGSTROEM, Sagan om de tio tecknen; BROCHMANN, De store opfinnelser; BOHLIN, Gaslagarna; AUTENRIETH-ROJAHN, Quantitative chemische Analyse; MEDICUS, Technisch-chemische Analyse; Almanack för alla 1931 234

Insänd litteratur från följande förläggare:

M. Bergvall, A. Bonnier, C. E. Fritze, P. A. Norstedt & Söner, A/B Seelig & Co, Skolöverstyrelsen, Svenska Bokförlaget, Tidens förlag, Wahlström och Widstrand, alla i Stockholm. C. W. K. Gleerup, Lund, Hjärtstedts förlag, Kristinehamn, J. A. Lindblad, Uppsala. V. Åström, Härnösand. F. Bruns bokhandel, Trondheim. Nasjonalforlaget, Oslo. Walter de Gruyter & Co, J. Springer, Berlin. T. Steinkopff, Dresden.

Rättelser.

Sid. 135, rad 7 uppifrån står motsvarighet, bör vara motvariation.

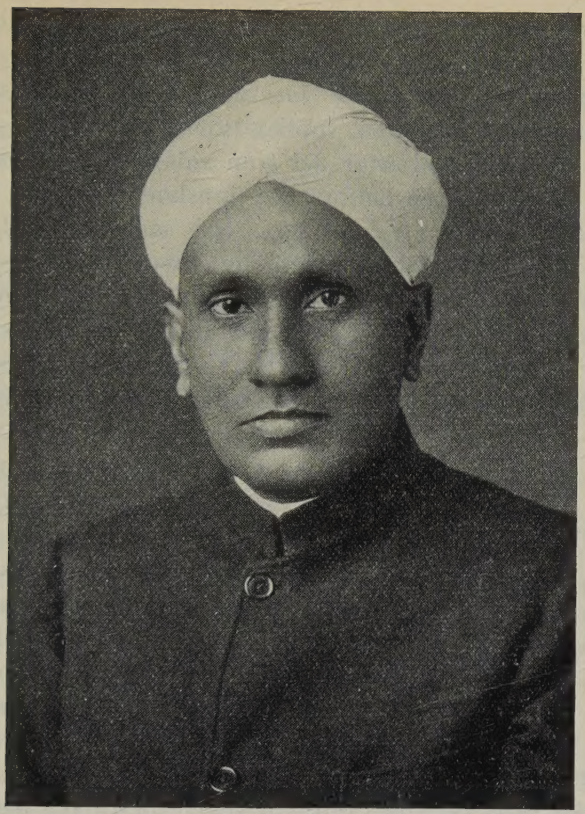
Sid. 153, fjärde raden i stycket mitt på sidan utgår. Meningen bör lyda: Om anledningen till att de välja lärare är den, att läraren i särskild grad lyckats intressera dem för sitt ämne, så är därom endast gott att säga.

* *
*

Tidskriften utgives av adjunkt C. E. BLOM, professor G. BORELIUS, rektor J. S. HEDSTRÖM och lektor G. STARCK. Redaktörer äro C. E. BLOM och G. STARCK samt för problemavdelningen adjunkt S. BÅGMAN.

Tidskr. utkommer med fyra 64-sidiga häften årligen (mars, juni, sept., dec.). Pris per häfte 2: 25, per årgång kr. 8: —. Subskription sker enklast genom inbetalning av kr. 8: — på tidskriftens postgirokonto n:r 52755, varefter häftena sändas per utgivarekorsband. Tidskriften kan även erhållas genom bokhandeln. Samma priser gälla även Danmark, Finland och Norge.

Redaktion och expedition: **Adjunkt C. E. BLOM, Karlbergsvägen 16IV, Stockholm Va. Postgiro 527 55.**



C. V. RAMAN.

Nobelpristagare i fysik.

1930 års Nobelpris för fysik har tilldelats CHANDRASEKHAR VENKATARAM RAMAN i Kalkutta för upptäckten av den efter honom benämnda optiska effekten. Denna upptäckt skedde — efter flera års föreberedande arbeten — så sent som 1928, och det torde icke förr ha inträffat, att ett vetenskapligt forskningsarbete så snabbt belönats med Nobelpriset —

ett vittnesbörd om omfattningen och betydelsen av de genom studiet av denna effekt redan vunna resultaten.

Det är välbekant, att ett ljusknippe, som får passera en genomskinlig, alldeles ren, »optiskt tom» kropp, ej är synligt för ett öga, som betraktar det från sidan, men att det blir synligt, om i kroppen befinna sig uppslammade eller kolloidalt lösta partiklar, som avböja och samtidigt polarisera ljuset. Fenomenet kallas Tyndalleffekten; på den spridda strålningens, ströstrålningens iakttagande i mikroskopet beror ultramikroskopien. Emellertid giva även optiskt rena ämnen Tyndalleffekt; bl. a. har KELVIN återfört det blåa himmelsljuset till en böjning av kortvågigt ljus mot atmosfärens gasmolekyler. Ramaneffekten är en ströstrålning, som åtföljer Tyndalleffekten, och ger sig tillkänna därigenom, att det utan frekvensändring på grund av Tyndalleffekt spridda ljuset åtföljes av en svag strålning med i allmänhet mindre, stundom större, frekvens. Schematiskt återges förhållandet av fig. 1, där T äro linjer, som bero på Tyndalleffekten och hava det infallande ljusets frekvenser, R äro Ramanlinjer.[1]

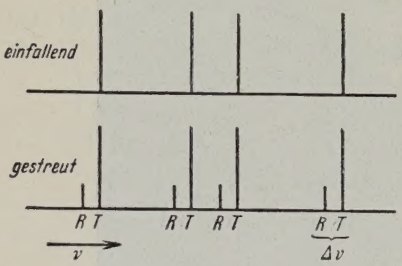


Fig. 1.

Om sålunda rent vatten eller någon annan vätska belyses av ljuset från en kvicksilverlampa, d. v. s. ett linjespektrum, och ströstrålningen fotograferas i en mot det infallande ljuset vinkelrät riktning, så erhållas utom de primära *Hg*-linjerna ljussvaga drabanter med i allmänhet lägre frekvens, ibland därjämte ännu svagare linjer med högre frekvens. Karakteristiskt för Ramaneffekten är, att frekvensdifferenserna äro oberoende av det infallande ljusets frekvens och

[1] Bilderna ur C. Schaefer och F. Matossi, Der Ramaneffekt (Fortschritte der Chemie, Physik und physikalischen Chemie, bd. 20, hft. 6, 1930).

lika med frekvensen för ett föreningen tillkommande ultrarött absorptionsband. Uppkomsten av Ramanlinjerna tillskrives den omständigheten, att molekylen kan intaga olika energinivåer, vilkas differenser motsvara ultraröda frekvenser:

$$\nu = \frac{E_m - E_n}{h},$$

där E_m och E_n äro energinivåerna och h Planck's konstant. Om nu molekylen, som må befinna sig i normaltillstånd, träffas av ett ljuskvantum $h\nu$ och härav använder endast en del $h\nu_0$ för att övergå till en högre energinivå, så kommer den återstående strålningen att spridas med frekvensen

$$\nu_R = \nu - \nu_0.$$

Utom dessa linjer med lägre frekvens, som således följa den Stokes'ska lagen för fluorescenslinjers frekvens, förekomma också som nämnt svaga linjer med högre frekvens (anti-Stokes'ska), vilkas uppkomst beror på att ljuskvantat $h\nu$ träffar en molekyl på en högre energinivå, varigenom ströstrålningen får frekvensen

$$\nu_R = \nu + \nu_0.$$

Ramaneffektens teori har utvecklats på grundval av kvantteorien och vågmekaniken. Väsentligt för dess uppkomst är förekomsten i molekylen av oharmoniska svängningar, som vid Ramaneffekt av första ordningen måste vara osymmetriska i den meningen, att krafterna i vändpunkterna skola vara olika stora. Tydligen har man i Ramaneffekten ett medel att på ett bekvämt sätt studera föreningarnas ultraröda egenfrekvenser. Dock motsvarar den icke fullständigt det ultraröda spektrum; många ultraröda linjer fattas i Ramanspektrum, å andra sidan innehåller detta linjer, som saknas i det på annat sätt observerade ultraröda bandspektret. Också har redan ett stort antal forskare med iver ägnat sig åt uppgiften att genom upptagande av Ramanspektra studera bl. a. även rent kemiska problem, t. ex. konstitutionsfrågor i organisk och oorganisk kemi. Stock-

holms Högskolas biologiska institut har nyligen anskaffat en Raman-apparatur, och här ha påbörjats undersökningar, som avse att genom studiet av svaga elektrolyters Ramanspektrum från en ny utgångspunkt angripa den viktiga frågan om tillståndet i dessa lösningar.[1]

Som ljuskälla vid studiet av Ramaneffekten har hittills nästan uteslutande använts kvicksilverlampan och av dess linjer företrädesvis linjerna $e(\lambda = 4\,358{,}3$ *Å.E.*, $\nu = 22\,938$ cm^{-1}), $k(\lambda = 4\,046{,}8$ *Å.E.*, $\nu = 24\,705)$ och i ultraviolett lin-

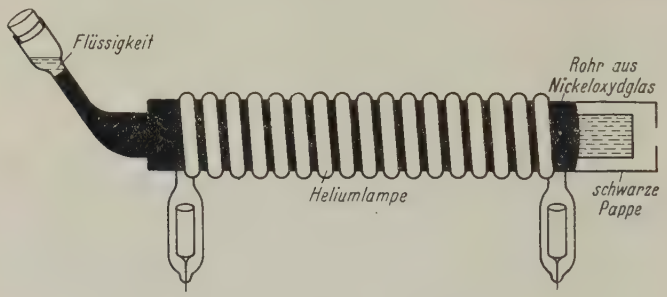


Fig. 2.

jen 2 536,5 *Å.E.* R. B. Wood använder för att eliminera kvicksilverlampans kontinuerliga spektrum en spiralformig heliumlampa, upplindad på ett cylindriskt kärl, innehållande den undersökta vätskan eller gasen, och skild därifrån av ett rör av nickeloxidglas, som i huvudsak genomsläpper endast den starka linjen 3 888,6 *Å.E.* Ströljuset iakttages i cylinderaxelns axelriktning (fig. 2).

G. Starck.

---

[1] H. v. Euler und H. Hellström, Svensk Kem. Tidskr. 1930, nr 12, sid. 300.

Hans Fischer.

Nobelpristagare i kemi.

1930 års Nobelpris för kemi har tilldelats professor Hans Fischer i München för hans arbeten över blod- och bladfärgämnenas konstitution och för hans syntes av hämin.

Åt studiet av de för de biologiska processerna utomordentligt viktiga blod-, blad- och gallfärgämnena har en rad av framstående forskare, bl. dem nobelpristagaren Willstätter,

ägnat sig, men ingen med sådan uthållighet och därav betingad framgång som Fischer. Sambandet mellan dessa tre klasser av ämnen framgår därav, att vid deras reduktion och spjälkning i alla tre fallen bildas en blandning av pyrrolhomologer, opsopyrrol, hämopyrrol, kryptopyrrol och fyllopyrrol. Den ur blodfärgämnet hämoglobin isolerade, äggvitefria delen ger, som bekant, med saltsyra en klorid, hämin, $C_{34}H_{32}O_4N_4FeCl$. Vid järnets avspjälkning med syror erhålles härav hämatoporfyrin. tillhörande porfyrinernas talrika klass. Dess formel är $C_{34}H_{38}O_6N_4$, den innehåller två karboxylgrupper. Denna förening kan genom en serie reaktioner byggas ned till etioporfyrin, $C_{32}H_{38}N_4$, identisk med tidigare ur klorofyll framställd och uppbyggd av fyra pyrrolkärnor. Dess konstitution har klarlagts av Fischer, som också framställt föreningen syntetiskt enligt flera metoder. Så erhåller man av kryptopyrrol eller 2,4-dimetyl-3-etylpyrrol vid behandling med brom och konc. svavelsyra en etioporfyrin, identisk med den ur hämoglobin framställda. Besläktade med hämatoporfyrin äro gallfärgämnet bilirubin, koproporfyrin i fäkalier, uroporfyrin i urin, även syntetiskt framställda. Härmed är det genetiska sambandet mellan dessa tre klasser av färgämnen bevisat.

År 1928 lyckades Fischer syntetiskt framställa hämatoporfyrin, protoporfyrin, slutligen också hämin; han har därmed klarlagt konstitutionen av ett av biologiens viktigaste ämnen och med denna glänsande framgång krönt ett 20-årigt, hängivet arbete.

G. Starck.

Sannolikhetsräkning på empirisk grundval.

Av EDVARD GÖRANSSON.

2. Teorien för observationsfel.

I förra häftet av denna tidskrift (årg. XIII, 1930, s. 193) har jag framkastat den tanken, att man skulle från laborationsförsök eller från lämpligt statistiskt material kunna erhålla en bild av den gauss'ska klockkurvan samt vidare angivit ett sätt att erhålla ett analytiskt uttryck för denna kurva. Därigenom skulle man kunna undvika den klassiska sannolikhetsräkningen. Emellertid torde för flertalet av denna tidskrifts läsare erforderlig litteratur i detta ämne knappast vara tillgänglig. Jag ämnar därför fortsätta framställningen med några tillämpningar, vilka skulle omfatta teorien för observationsfel, den normala sannolikhetsfunktionen, frekvenskurvor, livförsäkring samt några allmänna betraktelser. Därmed följer framställningen i huvudsak den historiska utvecklingen sedan början av 1800-talet.

Under senare hälften av 1700-talet började man komma till den uppfattningen, att man, då en storhet skulle bestämmas genom observation, kunde påräkna ett tillförlitligare resultat, om man icke nöjde sig med en enda observation, utan anställde en hel serie observationer samt gjorde en utjämning av dessa. Från en viss utgångspunkt kom DANIEL BERNOULLI år 1777 till det resultatet, att den kurva, som återger fellagen, är en havcirkel. Andra kurvor föreslogos ungefär samtidigt av LAPLACE.[1] GAUSS antog som ett axiom,

[1] HEINRICH WIELEITNER, Geschichte der Mathematik, Teil II, 1, Leipzig, Sammlung Schubert 1911.

att det aritmetiska mediet av mätningar för bestämning av en obekant storhet är det sannolikaste värdet, förutsatt att inga systematiska fel förefinnas. Med utgångspunkt härifrån fann han år 1809 med tillämpning av den klassiska probabilitetskalkylen, att sannolikheten y för ett observationsfel x angives av formeln

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}. \tag{1}$$

Väljer man i st. f. aritmetiska mediet ett annat postulat, exempelvis det geometriska eller harmoniska mediet, erhåller man en helt annan fellag.

Precisionen.[1] Av hela antalet fel uppgår enligt anförda uppsats i denna tidskrift antalet av dem, vilkas absoluta belopp icke överstiger ε, till den bråkdel, som angives av uttrycket

$$p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-h^2x^2} dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\varepsilon} e^{-h^2x^2} dx.$$

Sättes $hx = u$, antager detta uttryck formen

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{h\varepsilon} e^{-u^2} du.$$

Funktionen

$$\Theta(h\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{h\varepsilon} e^{-u^2} du \tag{2}$$

finnes tabulerad i en del läroböcker i sannolikhetsräkning, t. ex. hos Hertz.[2] I följande tabell upptagas några värden

[1] Maurice d'Ocagne, Notions élementaires sur la probabilité des erreurs, Paris, Gauthier-Villars 1910. Från samma förf. härrör framställningen om sannolikt fel, genomsnittligt fel och medelfel.

[2] Norbert Hertz, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Ausgleichungsrechnung, Leipzig, Sammlung Schubert, 1900.

på funktionen $\Theta(h\varepsilon)$ för att bland annat klargöra, hur hastigt den går mot 1. (Se fig. 2 i föregående uppsats.)

$h\varepsilon$	$\Theta(h\varepsilon)$	$h\varepsilon$	$\Theta(h\varepsilon)$
0	0	1	0·8427008
0·1	0·1124630	1·5	0·9661052
0·2	0·2227025	1·85	0·9911110
0·3	0·3286267	2·33	0·9990162
0·4	0·4283922	2·76	0·9999051
0·5	0·5204999	3·13	0·9999904
0·6	0·6038561	4·80	0·9999999
0·7	0·6778010	∞	1.
0·8	0·7421010		
0·9	0·7969082		

I allmänhet känner man hur stor del de försök, som äro behäftade med fel, vilkas numeriska värde ej överstiger ε, utgöra av hela antalet försök. $\Theta(h\varepsilon)$ är alltså bekant och i tabellen avläses motsvarande värde på $h\varepsilon$. Då ε är känt, får man alltså reda på h. Om $\Theta(h\varepsilon)$ är stort samtidigt med att ε är litet, är alltså h, d. v. s. »precisionen», stor. Man kallar därför h för *precisionsmåttet.*

I teorien för observationsfel talar man om *sannolikt fel, genomsnittligt fel* och *medelfel.*

Sannolika felet. Man ordnar felen efter storleken av deras absoluta belopp och utväljer det fel ε_0, som har egenskapen, att samma antal fel är $> \varepsilon_0$ som det, som är $< \varepsilon_0$. Sannolikheten för att ett fels numeriska värde är $> \varepsilon_0$ är alltså lika stor som sannolikheten för att det är $< \varepsilon_0$. Sannolikheten för att felets numeriska värde är ε_0, är alltså $^1/_2$, varav

$$\Theta(h\varepsilon_0) = \frac{1}{2}.$$

Av tabellen över felfördelningen framgår, att $h\varepsilon_0$ ligger mellan 0·4 och 0·5. Genom interpolation finner man, att $h\varepsilon_0 = 0{\cdot}4769$. Mot ett sannolikt fel ε_0 svarar alltså ett precisionsmått

$$h = \frac{0.4769}{\varepsilon_0}. \tag{3}$$

Genomsnittliga felet. Med genomsnittligt fel ε_1 menar man medelvärdet av samtliga fels absoluta belopp, vilket erhålles genom att dividera summan av samtliga fels absoluta belopp med hela antalet försök. Man söker det precisionsmått, som svarar mot genomsnittliga felet.

Sannolikheten för att ett fel är beläget mellan x och $x + dx$ är enligt definitionen lika med förhållandet mellan ytan av rektangeln $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx$ och hela antalet fel. Men hela antalet fel representeras av den totala yta, som inneslutes mellan felkurvan och x-axeln. Proportionalitetsfaktorn har enligt det föregående valts så, att denna yta är lika med 1.

Nu kan absoluta beloppet av varje fel mellan ifrågavarande gränser (x och $x + dx$) sättas lika med $|x|$, och alltså är $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} |x| dx$ lika med summan av absoluta beloppen av fel belägna mellan gränserna x och $x + dx$. Medelvärdet av dessa erhålles, om man dividerar ifrågavarande uttryck med totala antalet fel, vilket representeras av förutnämnda yta, vars storlek genom valet av proportionalitetsfaktor blivit satt lika med 1.

Summan av medelvärdena av absoluta beloppen av samtliga fel är alltså

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2} |x| dx = \varepsilon_1$$

eller

$$\varepsilon_1 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-h^2x^2} x dx.$$

Sättes $h^2x^2 = u$, är

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{1}{h\sqrt{\pi}},$$

$$\left(\int_0^\infty e^{-u}\,du = -\int_0^\infty e^{-u} = 1\right)$$

och alltså precisionsmåttet

$$h = \frac{1}{\varepsilon_1\sqrt{\pi}} = \frac{0.5642}{\varepsilon_1}. \tag{4}$$

Medelfelet. Man beräknar medeltalet av kvadraterna på felen. Kvadratroten ur detta medeltal är medelfelet (egentligen kvadratiska medelfelet) och betecknas med ε_2.

Analogt med det föregående är medelvärdet av summan av kvadraterna på de fel, som ligga mellan gränserna x och $x+dx$ lika med förhållandet mellan $\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2x^2}x^2dx$ och hela antalet fel, d. v. s. den av kurvan och x-axeln begränsade ytan, vars storlek är lika med 1.

Alltså är

$$\varepsilon_2{}^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}x^2\,dx.$$

Men enligt det föregående är

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}.$$

Om man deriverar båda leden i denna ekvation med avseende på h, erhålles

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}2hx^2\,dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{h^2},$$

varav

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}x^2\,dx = \frac{1}{2h^2}$$

eller

$$\varepsilon_2{}^2 = \frac{1}{2h^2}$$

och alltså precisionsmåttet

$$h = \frac{1}{\varepsilon_2 \sqrt{2}} = \frac{0.7071}{\varepsilon_2}. \tag{5}$$

Av de tre anförda slagen av fel och motsvarande precisionsmått är det sista, d. v. s. kvadratiska medelfelet eller helt kort kallat medelfelet, det, som nästan uteslutande användes i praktiken, därför att särskilt de stora observationsfelen här göra sig gällande.

Jämförelse mellan olika slag av observationsfel. Man har

$$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} = 0.4769 \sqrt{2} = 0.6744$$

eller i runt tal

$$\varepsilon_0 = \frac{2}{3} \varepsilon_2.$$

Sannolika felet är alltså $^2/_3$ av medelfelet.

Vidare är

$$\frac{\varepsilon_2^{\,2}}{\varepsilon_1^{\,2}} = \frac{\pi}{2},$$

vilket ger en metod att empiriskt beräkna värdet av π.

Om man av uttrycket för GAUSS' kurva

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

bildar $\frac{d^2y}{dx^2}$ och sätter detta uttryck lika med 0, är

$$x^2 = \frac{1}{2h^2} = \varepsilon_2^{\,2}.$$

Medelfelet ε_2 är alltså det x-värde, som svarar mot felkurvans inflexionspunkt.

Jämförelse mellan erfarenhet och teori. Om N är totala antalet observationer, skulle teoretiskt sett antalet fel, vilka ligga mellan $n\varepsilon$ och $(n+1)\varepsilon$ samt mellan $-n\varepsilon$ och $-(n+1)\varepsilon$ utgöra

$$N\{\Theta[h(n+1)\varepsilon] - \Theta(hn\varepsilon)\}$$

och de, som ligga inom vartdera av förutnämnda intervall

$$\frac{N}{2}\{\Theta[h(n+1)\varepsilon] - \Theta(hn\varepsilon)\}.$$

Om h är bestämt på något av förut angivna sätt, kan man med tillhjälp av tabellen över funktionen Θ teoretiskt beräkna antalet fel inom intervallet i fråga och jämföra det med försöket. Om avvikelsen är allt för stor, kan man sluta till förefintligheten av ett systematiskt fel.

Övre gränsen för tillåtna fel. Ifrågavarande gräns bestämmes av förut omnämnda gränsvärde på λ (se fig. 2 i föregående uppsats), där man kan antaga, att felkurvan praktiskt sett skär x-axeln. Man brukar antaga, att detta inträffar, då den del av ytan, som begränsas av felkurvan och positiva x-axeln för $x \geqq \lambda$ uppgår till 0·001 av hela den av kurvan och x-axeln begränsade ytan. Om man sätter

$$\Theta(h\lambda) = 0{\cdot}999,$$

framgår av tabellen över funktionen $\Theta(h\varepsilon)$, att

$$h\lambda = 2{\cdot}33,$$

så att

$$\frac{\lambda}{\varepsilon_2} = 2{\cdot}33\sqrt{2} = 3{\cdot}3.$$

Man brukar i runt tal sätta $\lambda = 3\varepsilon_2$. Om det största felet λ håller sig under 3 gånger medelfelet, anses försöksserien tillfredsställande.

»Verkliga» värdet. I det föregående har medelvärdet likställts med det »verkliga» värdet. I första ögonblicket förefaller det, som om man med fel borde avse avvikelsen från den sökta storhetens verkliga värde. Det verkliga värdet är i allmänhet obekant. En fysikalisk eller statistisk konstant är i själva verket en variabel, som anses känd, endast om man känner fördelningsfunktionen.

Antag, att det »verkliga» värdet är w, aritmetiska mediet m samt låt de observerade värdena vara $x_1, x_2, \ldots x_n$. Om

man vid beräkning av medelfelet ε_2 räknar med $\Sigma(x_i - m)^2$, ställer sig saken givetvis annorlunda, än om man kunde räkna med $\Sigma(x_i - w)^2$. Låtom oss undersöka skillnaden.

$$\Sigma(x_i - w)^2 - \Sigma(x_i - m)^2 = \Sigma(2x_i - w - m)(m - w) =$$
$$= n(w^2 - m^2) - 2(w - m)\Sigma x_i = n(w^2 - m^2) -$$
$$- 2nm(w - m) = n(w - m)^2.$$

Den verkliga kvadratiska avvikelsen är alltså större än den man får, om man räknar med avvikelsen från aritmetiska mediet. Antager man, att

$$(w - m)^2 = \frac{{\varepsilon_2}^2}{n},$$

blir alltså

$$\Sigma(x_i - w)^2 = \Sigma(x_i - m)^2 + {\varepsilon_2}^2$$

eller

$$n{\varepsilon_2}^2 = \Sigma(x_i - m)^2 + {\varepsilon_2}^2,$$

d. v. s.

$$\varepsilon_2 = \pm \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - m)^2}{n - 1}},$$

vilket alltså är ett uttryck för medelfelet i de särskilda mätningarna.

Vidare är enligt det nyss gjorda antagandet

$$w = m \pm \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{n}}$$

och alltså medelfelet i medelvärdet

$$\pm \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - m)^2}{n(n - 1)}}.$$

Man brukar därför sätta det »verkliga» värdet

$$w = m \pm \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - m)^2}{n(n - 1)}}. \tag{6}$$

Enligt det föregående är sannolika felet $^2/_3$ av medelfelet och genomsnittliga felet $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ gånger medelfelet.

Principen för minsta kvadratmetoden. Ofta ingår den konstant, vars värde genom försök skall utrönas, i en ekvation, som är ett uttryck för en fysisk lag. Stundom innehåller en dylik formel flera konstanter, som skola bestämmas. Om man för att vinna större noggrannhet utför ett större antal observationer än antalet konstanter, som skola bestämmas, gäller det att finna en metod att på bästa sätt utnyttja observationerna. Det anförda må belysas av ett par exempel.

Ex. 1. Man skall bestämma längden av en stav vid 0° och dess förlängning för 1° temperaturförhöjning genom en serie mätningar av längden vid olika temperaturer.[1]

Om längden vid 0° är a och längdutvidgningskoefficienten är b, så är längden y vid en temperatur av x grader bestämd av likheten

$$y = a + bx.$$

De obekanta konstanterna a och b bleve således bestämda genom två par observationer av x och motsvarande y, om man ej behövde befara observationsfel. Antag, att man utfört n observationer ($n > 2$), så gäller det att bestämma de mest sannolika värdena på a och b.

Sätt

$$y_i - a - bx_i = \varepsilon_i.$$

Sannolikheten för att felet i y_1 befinner sig mellan ε_1 och $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$ är enligt det föregående lika med

$$\frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 \varepsilon_1^2} d\varepsilon_1,$$

då h_1 är precisionen med hänsyn till y_1. Om n är hela antalet försök, omfattar gruppen

$$\nu_1 = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 \varepsilon_1^2} d\varepsilon_1 \cdot n$$

[1] F. Kohlrausch, Leitfaden der praktischen Physik, 13:e uppl., Leipzig, Berlin, Teubner 1921.

de försök, som sannolikt äro behäftade med fel mellan ε_1 och $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$. Uttrycket

$$\frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 \varepsilon_2^2} d\varepsilon_2$$

anger sannolikheten för att felet i y_2 ligger mellan ε_2 och $\varepsilon_2 + d\varepsilon_2$. Produkten

$$\nu_2 = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 \varepsilon_2^2} d\varepsilon_2 \cdot \nu_1 = \frac{h_1 \cdot h_2}{(\sqrt{\pi})^2} \cdot e^{-(h_1^2 \varepsilon_1^2 + h_2^2 \varepsilon_2^2)} d\varepsilon_1 \cdot d\varepsilon_2 \cdot n$$

utgör en del av de i gruppen ν_1 ingående felen. $\frac{\nu_2}{n}$ är alltså ett uttryck för det sannolika sammanträffandet av felen ε_1 och ε_2. Upprepas detta betraktelsesätt, erhålles till sist

$$\frac{\nu_n}{n} = \frac{h_1 \cdot h_2 \ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-(h_1^2 \varepsilon_1^2 + h_2^2 \varepsilon_2^2 + \ldots + h_n^2 \varepsilon_n^2)} d\varepsilon_1 \cdot d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_n,$$

vilket är uttrycket för sannolikheten av sammanträffandet just av felen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$. Det sannolikaste värdepar a, b är det, som gör uttrycket för det sannolika sammanträffandet av ifrågavarande fel, d. v. s. uttrycket $\frac{\nu_n}{n}$, till ett maximum, vilket inträffar, då

$$S = h_1^2 \varepsilon_1^2 + h_2^2 \varepsilon_2^2 \ldots h_n^2 \varepsilon_n^2$$

d. v. s.

$$S = \Sigma h_i^2 (y_i - a - bx_i)^2$$

är ett minimum. Värdeparet a, b bestämmes alltså av ekvationssystemet

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

eller med andra ord

$$\begin{cases} \Sigma h_i^2 (y_i - a - bx_i) = 0 \\ \Sigma h_i^2 x_i (y_i - a - bx_i) = 0. \end{cases}$$

Av skäl, som skall framgå av det följande, kallar man h_i^2 den *vikt*, man tilldelar det i:te försöket. Antages att alla försöken ha samma vikt, blir

$$a = \frac{\Sigma x_i \Sigma x_i y_i - \Sigma y_i \Sigma x_i^2}{(\Sigma x_i)^2 - n \Sigma x_i^2}, \qquad b = \frac{\Sigma x_i \Sigma y_i - n \Sigma x_i y_i}{(\Sigma x_i)^2 - n \Sigma x_i^2}.$$

Med användning av de sålunda funna värdena på a och b beräknar man för olika värden på temperaturen x_i de motsvarande värdena på längden y_i'. Skillnaden mellan det beräknade värdet y_i' och det observerade y_i, d. v. s. $y_i' - y_i$, är sannolika felet i observationen. Medelfelet är

$$\sqrt{\frac{\Sigma (y_i' - y_i)^2}{n - 2}}.$$

Analogt förfar man, om m storheter skola bestämmas och mellan dem förefinnes en lineär ekvation. Om antalet observationer är n, $(n > m)$, är medelfelet

$$\sqrt{\frac{\Sigma (y_i' - y_i)^2}{n - m}}.$$

Ex. 2. Antag, att man n gånger mätt samma storhet x och därvid funnit värdena $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ med vikten $h_1^2, h_2^2, \ldots h_n^2$ resp. Man skall då söka det mest sannolika värde, som satisfierar ekvationssystemet

$$x - \omega_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Sättes

$$x - \omega_i = \varepsilon_i,$$

skall i analogi med det föregående

$$S = \Sigma h_i^2 (x - \omega_i)^2$$

vara ett minimum. Sättes derivatan med avseende på x lika med 0, finner man

$$x = \frac{\Sigma h_i^2 \omega_i}{\Sigma h_1^2},$$

vilket uttryck motiverar, varför man givit namnet *vikt* åt kvadraten på precisionen.

Om alla mätningar ha samma vikt, är följaktligen

$$x = \frac{\Sigma \omega_i}{n}.$$

Med tillhjälp av GAUSS' lag har alltså bevisats, att det aritmetiska mediet är det bästa värdet, då alla försöken ha samma vikt. Såsom i början av detta kapitel anförts, antog GAUSS denna sats som ett postulat vid deduktion av fellagen. Här åter har antagits, att felkurvan är given genom erfarenheten. Från det gjorda antagandet om felkurvan har bevisats, att det aritmetiska mediet är det bästa värdet.

Med måttliga matematiska förutsättningar kan man på den föreslagna empiriska grundvalen alltså komma fram till nyttiga kunskaper.

3. Den normala sannolikhetsfunktionen.

I det föregående har erinrats om, att när man talar om observationsfel, man nästan uteslutande avser medelfelet, vilket betecknas med ε_2. Vid tillämpning av sannolikhetsräkningen på statistiken, varpå jag i en följande uppsats vill lämna några exempel, utbyter man namnet medelfel mot medelavvikelse och beteckningen ε_2 mot σ. Alltså är

$$\sigma^2 = \varepsilon_2{}^2 = \frac{\Sigma (x_i - m)^2}{n},$$

då m är medelvärdet, x_i termerna i den statistiska serien och n antalet termer. Man kallar σ även för dispersionen, därför att cirka $^2/_3$ av seriens termer (jfr tabellen i slutet av detta kapitel) normalt ligga inom intervallet $m \pm \sigma$. Följaktligen är enligt (5)

$$h = \frac{1}{\sigma \sqrt{2}}.$$

Insättes detta värde i uttrycket (1) för felfunktionen samt ersättes vidare felet x med avvikelsen från medelvärdet, $x - m$, erhåller man

$$(7) \qquad y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}.$$

Funktionen

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{8}$$

kallas för den *normala sannolikhetsfunktionen*. Ekvationen (7) kan följaktligen skrivas

$$y = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right). \tag{9}$$

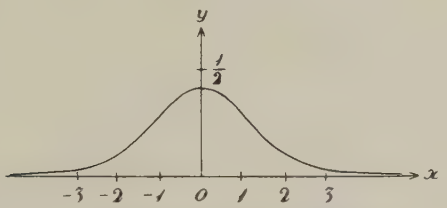


Fig. 3. Den normala sannolikhetsfunktionen.

Funktionen $\varphi(x)$, som låter beräkna sig med elementära hjälpmedel, har sitt maximum $\varphi(0) = 0{\cdot}3989$. Den motsvarande kurvan har inflexionspunkter för $x = \pm 1$. $\varphi(\pm 1) = 0{\cdot}2420$. För numeriskt växande x närmar sig $\varphi(x)$ snabbt gränsvärdet 0. Redan för $x = \pm 4$ har man

$$\varphi(-4) = \varphi(4) = 0{\cdot}000134.$$

Om man i den förut införda funktionen $\Theta(h\varepsilon)$, se formeln (2), av förut anförda grunder ersätter h med $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$, så erhålles

$$\Theta\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-u^2} du.$$

Sättes vidare $u = \frac{t}{\sqrt{2}}$ och $\frac{\varepsilon}{\sigma} = x$ samt iakttages, att enligt det föregående

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}, \text{ varav } \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ och } \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2},$$

erhålles

$$\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right]=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt-1.$$

Inom den matematiska statistiken användes, i stället för funktionen Θ, funktionen

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \tag{10}$$

Man har alltså

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}\left[1+\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{11}$$

Funktionen $\Phi(x)$, som definieras av ekvationen (10), kallas *den normala fördelningsfunktionen.*

Såsom förut är omtalat, finnes den inom felteorin använda funktionen Θ tabulerad. I Berliner Astronomisches Jahrbuch för år 1834 återfinnes en sådan tabell av Encke med 5 decimaler och i det förut anförda arbetet av Hertz en tabell med 6 decimaler. Medelst formeln (11) kan man genom interpolation beräkna $\Phi(x)$, då man har en tabell över $\Theta(x)$. I professor Cramérs förut omnämnda arbete finnes en tabell upptagande såväl den normala sannolikhetsfunktionen $\varphi(x)$ som den normala fördelningsfunktionen $\Phi(x)$.

Av tabellen framgår, att även $\Phi(x)$ hastigt närmar sig sina gränsvärden för numeriskt växande x. Man finner, att

$$\Phi(-4)=0{,}000032 \text{ och } \Phi(4)=0{,}999968.$$

Kurvan, vars utseende återges av fig. 4, har en inflexionspunkt $(0, {}^1/_2)$. Av figuren finner man, att

$$\Phi(x)+\Phi(-x)=1.$$

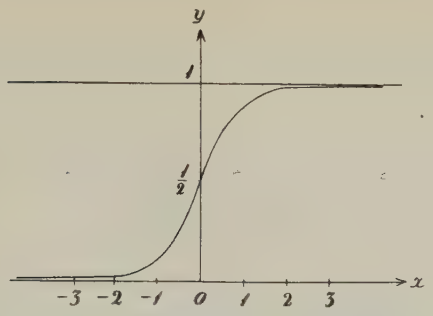


Fig. 4. Den normala fördelningsfunktionen.

Relativa antalet termer i den statistiska serien, som ligga mellan $m - \varepsilon$ och $m + \varepsilon$, angives enligt det föregående genom den yta, som begränsas av x-axeln mellan $m - \varepsilon$ och $m + \varepsilon$, motsvarande ordinator samt kurvan (7). Medelst fördelningsfunktionen $\Phi(x)$ har man alltså att beräkna

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \Theta\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{2}}\right).$$

Men enligt det föregående är

$$\Theta\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{2}}\right) = 2\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1.$$

Frekvensen av de avvikelser från m, som ligga mellan gränserna $-\varepsilon$ och $+\varepsilon$, är alltså lika med

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1.$$

Med tillhjälp av den i professor CRAMÉRS förut anförda arbete förefintliga tabellen över Φ-funktionen finner man, att *sannolikheten för att avvikelsen till sitt numeriska belopp ej överstiger*

0.1σ är lika med	0.0796	1.5σ är lika med	0.8664
0.2σ » » »	0.1585	2.0σ » » »	0.9545
0.3σ » » »	0.2358	2.5σ » » »	0.9876
0.4σ » » »	0.3108	3.0σ » » »	0.9973
0.5σ » » »	0.3829	4.0σ » » »	0.99994
1.0σ » » »	0.6826	5.0σ » » »	0.9999994

Den regelbundna sjuttonhörningen.

Av AGNE WAHLGREN.

I större handböcker i algebra behandlas problemet att konstruera en regelbunden sjuttonhörning i samband med den allmänna teorien för ekvationen $x^p = 1$ och lösningen erhålles såsom ett specialfall av denna teori. Här skall jag

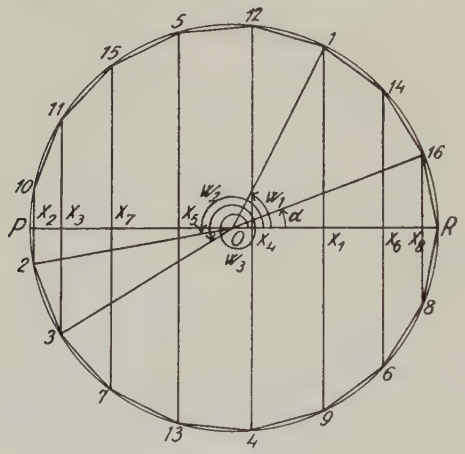


Fig. 1.

giva en lösning av problemet utan alla för detta specialfall onödiga partier av den allmänna teorien och utan användning av imaginära tal. Naturligtvis skiljer sig lösningen ej i sak från den vanliga metoden.

Det begäres således att i en given cirkel inskriva en regelbunden sjuttonhörning. I fig. 1 tänkes problemet löst, och alla hörnen ha projicierats på diametern PR, varvid 8 olika sträckor OX erhållits. De numreras emellertid ej efter storlek utan efter följande princip. Om $\alpha = \frac{1}{17} \cdot 360^\circ$, bildas

$$w_k = 3^k \cdot \alpha; \quad x_k = r \cdot \cos w_k. \tag{1}$$

Vid bildandet av x-värdena må observeras, att för *varje* vinkel u, för vilken

$$x_k = r \cdot \cos u,$$

erhålles x_{k+1}, om vinkeln u utbytes mot $3u$. Ty av

$$r \cdot \cos u = r \cdot \cos w_k$$

följer

$$u = \pm w_k + n \cdot 360°;$$

$$r \cdot \cos 3u = r \cdot \cos (\pm 3w_k + 3n \cdot 360°) =$$

$$= r \cdot \cos 3w_k = x_{k+1}.$$

[Likaså övergår x_k till x_{k+2}, om u utbytes mot $9u$, vilket kommer till användning längre fram.]

Speciellt om

$$w_k = p \cdot 17\alpha + v_k \text{ och } 3v_k = q \cdot 17\alpha + v_{k+1},$$

där p och q äro hela tal (eller 0), blir

$$x_{k+1} = r \cdot \cos 3w_k = r \cdot \cos 3v_k = r \cdot \cos v_{k+1}.$$

Vid den successiva bestämningen av x-värdena är det således tillräckligt att multiplicera föregående *rest* v_k med 3 och avskilja eventuella multipler av 17α.

För $k = 1, 2 \ldots . 16$ erhållas nu vinklarna i den ordning, i vilken de numrerats i figuren, och redan för $k = 1, 2 \ldots . 8$ motsvara x-värdena alla 8 sträckorna OX_k (räknade negativt, när X_k ligger till vänster om O). För $k = 9, 10 \ldots . 16$ återkomma x-värdena i samma ordning.

Vi få

$$x_1 = r \cdot \cos \ 3\alpha = r \cdot \cos 14\alpha;$$
$$x_2 = r \cdot \cos \ 9\alpha = r \cdot \cos \ 8\alpha;$$
$$x_3 = r \cdot \cos 10\alpha = r \cdot \cos \ 7\alpha;$$
$$x_4 = r \cdot \cos 13\alpha = r \cdot \cos \ 4\alpha;$$
$$x_5 = r \cdot \cos \ 5\alpha = r \cdot \cos 12\alpha;$$
$$x_6 = r \cdot \cos 15\alpha = r \cdot \cos \ 2\alpha;$$
$$x_7 = r \cdot \cos 11\alpha = r \cdot \cos \ 6\alpha;$$
$$x_8 = r \cdot \cos 16\alpha = r \cdot \cos \alpha.$$

Det är tydligt, att om vi kunna konstruera någon av dessa åtta sträckor, är uppgiften löst. Vi välja x_8. Vi skola först bestämma summan S av alla x-värdena. Ordna vi dem för ett ögonblick efter avtagande storlek, kan summan skrivas

$$S = \sum_{k=1}^{8} r \,.\, \cos k\alpha = r \,.\, \sum_{k=1}^{8} \cos k\alpha.$$

Vi tänka oss nu en regelbunden sjuttonhörning med sidan 1 projicierad på en baslinje, sammanfallande med en av

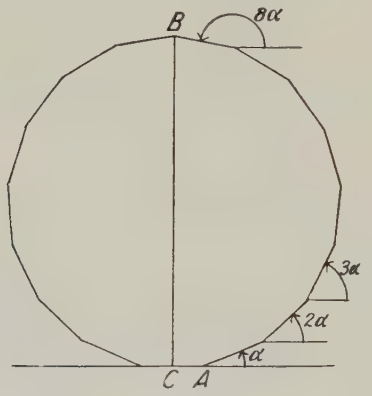


Fig. 2.

sidorna (se fig. 2!). Projektionen av den brutna linjen AB blir då

$$\sum_{k=1}^{8} \cos k\alpha = AC = -\tfrac{1}{2};$$

$$\therefore S = -\tfrac{1}{2} r.$$

Vi införa nu nya obekanta:

$$y_1 = x_1 + x_5; \qquad y_3 = x_3 + x_7;$$
$$y_2 = x_2 + x_6; \qquad y_4 = x_4 + x_8;$$

$$z_1 = y_1 + y_3 = x_1 + x_3 + x_5 + x_7;$$
$$z_2 = y_2 + y_4 = x_2 + x_4 + x_6 + x_8.$$

Problemet löses nu så, att först konstrueras z_1 och z_2, sedan y_1 och y_4 och slutligen x_8.

a) *Konstruktion av z_1 och z_2.* Nyss har visats, att

$$z_1 + z_2 = \sum_{k=1}^{8} x_k = -\tfrac{1}{2} r.$$

Vi skola nu bilda produkten av

$$z_1 = x_1 + x_3 + x_5 + x_7$$

och

$$z_2 = x_2 + x_4 + x_6 + x_8.$$

Därvid erhållas inalles 16 termer av formen $x_g \,.\, x_k$. Vi bestämma först

$$P_1 = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + x_7x_8.$$

Vi få

$$x_1x_2 = r^2 \,.\, \cos 3\alpha \cos 9\alpha = \tfrac{1}{2} r^2 (\cos 12\alpha + \cos 6\alpha) =$$
$$= \tfrac{1}{2} r (x_5 + x_7).$$

Likheten mellan de trigonometriska uttrycken gäller fortfarande, om alla vinklar multipliceras med 9. Men därvid övergår varje x-värde till ett nytt, vars index är 2 enheter större. Genom successiva multiplikationer med 9 erhålles således

$$x_3x_4 = \tfrac{1}{2} r (x_7 + x_1);$$
$$x_5x_6 = \tfrac{1}{2} r (x_1 + x_3);$$
$$x_7x_8 = \tfrac{1}{2} r (x_3 + x_5).$$

M. a. o. första termen i högra membrum genomlöper x-värdena med udda indices och likaså andra termen.

$$\therefore P_1 = \tfrac{1}{2} r (z_1 + z_1) = rz_1.$$

Nu bildas

$$P_2 = x_1x_4 + x_3x_6 + x_5x_8 + x_7x_2.$$

Första termen blir

$$x_1x_4 = r^2 \,.\, \cos 3\alpha \,.\, \cos 13\alpha = \tfrac{1}{2} r^2 (\cos 16\alpha + \cos 10\alpha) =$$
$$= \tfrac{1}{2} r (x_3 + x_8).$$

Om man liksom nyss multiplicerar vinklarna med 9, genomlöper vänstra membrum de följande termerna i P_2, medan

i högra membrum x_3 och x_8 övergå till övriga x-värden med resp. udda och jämn index.

$$\therefore P_2 = \tfrac{1}{2} r (z_1 + z_2).$$

På samma sätt erhålles

$$x_1 x_6 = r^2 . \cos 3\alpha \cos 15\alpha = \tfrac{1}{2} r^2 (\cos 18\alpha + \cos 12\alpha) = \\ = \tfrac{1}{2} r (x_8 + x_5),$$

$$\therefore P_3 = x_1 x_6 + x_3 x_8 + x_5 x_2 + x_7 x_4 = \tfrac{1}{2} r (z_2 + z_1);$$

$$x_1 x_8 = r^2 . \cos 3\alpha \cos 16\alpha = \tfrac{1}{2} r^2 (\cos 19\alpha + \cos 13\alpha) = \\ = \tfrac{1}{2} r (x_6 + x_4),$$

$$\therefore P_4 = x_1 x_8 + x_3 x_2 + x_5 x_4 + x_7 x_6 = r z_2 .$$

Men med P_1, P_2, P_3 och P_4 ha alla termer i $z_1 . z_2$ kommit med.

$$\therefore z_1 z_2 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 2r (z_1 + z_2) = - r^2.$$

Då bli z_1 och z_2 rötter till ekvationen

$$z^2 + \tfrac{1}{2} rz - r^2 = 0.$$

Av fig. 1 synes, att z_2 är den positiva roten.

$$\therefore z_2 = - \frac{r}{4} + \sqrt{\left(\frac{r}{4}\right)^2 + r^2}. \qquad (2)$$

Sättes $z_1 = - \zeta_1$, blir

$$\zeta_1 = \frac{r}{4} + \sqrt{\left(\frac{r}{4}\right)^2 + r^2}. \qquad (3)$$

Utgående från sträckan $OR = r$ kan man nu lätt konstruera $OA = z_2$ och $OB = \zeta_1$ (se fig. 3!).

b) *Konstruktion av y_1 och y_4.* Vi få

$$y_1 + y_3 = z_1 = - \zeta_1$$

och

$$y_1 . y_3 = (x_1 + x_5)(x_3 + x_7) = x_1 x_3 + x_3 x_5 + \\ + x_5 x_7 + x_7 x_1 . \qquad (4)$$

Men

$$x_1 x_3 = r^2 \cdot \cos 3\alpha \cos 10\alpha = \tfrac{1}{2} r^2 (\cos 13\alpha + \cos 7\alpha) =$$
$$= \tfrac{1}{2} r (x_4 + x_3)$$

och vid upprepad multiplicering av vinklarna med 9 övergår vänstra membrum till de övriga termerna i (4), medan

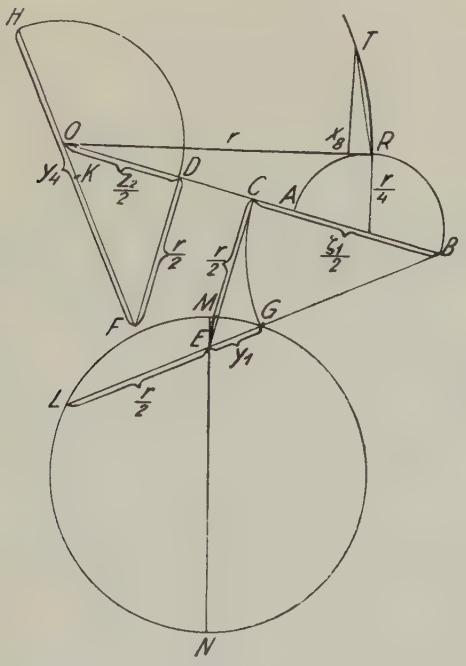


Fig. 3.

x_4 och x_3 i högra membrum övergå till övriga x-värden med resp. jämna och udda indices.

$$\because y_1 \cdot y_3 = \frac{1}{2} r (z_2 + z_1) = -\frac{r^2}{4}.$$

Då bli y_1 och y_3 rötter till ekvationen

$$y^2 + \zeta_1 y - \frac{r^2}{4} = 0,$$

och då y_1 är den positiva roten, blir

$$y_1 = -\frac{z_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{z_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}. \tag{5}$$

På samma sätt finna vi, att y_2 och y_4 bli rötter till ekvationen

$$y^2 - z_2 y - \frac{r^2}{4} = 0,$$

och då y_4 är den positiva roten, blir

$$y_4 = \frac{z_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{z_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}. \tag{6}$$

För att konstruera y_1 och y_4 dela vi OB och OA mitt itu i C och D och draga normalerna CE och DF vardera lika med $\frac{1}{2}r$. Sedan erhålles lätt $EG = y_1$ och $FH = y_4$.

c) *Konstruktion av* x_8. Vi få

$$x_4 + x_8 = y_4 \tag{7}$$

och

$$x_4 \cdot x_8 = r^2 \cdot \cos 4\alpha \cos \alpha = \tfrac{1}{2} r^2 (\cos 5\alpha + \cos 3\alpha) =$$
$$= \tfrac{1}{2} r (x_5 + x_1) = \tfrac{1}{2} r y_1. \tag{8}$$

Då äro x_4 och x_8 rötter till ekvationen

$$x^2 - y_4 x + \tfrac{1}{2} r y_1 = 0$$

och då x_8 är den större roten, blir

$$x_8 = \frac{y_4}{2} + \sqrt{\left(\frac{y_4}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} r y_1}. \tag{9}$$

Men i stället för att bygga konstruktionen på denna ekvation är det enklare att ansluta konstruktionen direkt till ekvationerna (7) och (8). Vi dela FH mitt itu i K, avsätta $EL = \frac{1}{2}r$ på GE:s förlängning samt upprita en cirkel genom G och L med radien lika med FK. Drages i denna cirkel en diameter genom E, bli dess delar EM och EN de sökta sträckorna x_4 och x_8. Avsättes $OX_8 = EN$ på OR och drages nor-

malen X_8T, blir TR den sökta sidan. Med användning av ekvationerna (2), (3), (5), (6) och (9) samt ekvationen

$$s_{17}^2 = 2r\,(r - x_8)$$

får man följande formel för sjuttonhörningens sida:

$$s_{17} = r\sqrt{N - \tfrac{1}{2}\sqrt{N} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{17})\,(\sqrt{17} - 2\sqrt{N})}}$$

där

$$N = \frac{17 - \sqrt{17}}{8}.$$

Det väsentliga i denna lösning var, att x-värdena upprepade gånger kunde delas upp i *två* mindre grupper, varigenom x-värdenas summor i de olika grupperna kunde erhållas genom lösning av en serie andragradsekvationer. För att metoden skall kunna tillämpas, fordras således, att månghörningens sidoantal N har formen $2^n + 1$.

Men en annan väsentlig sak var även, att man genom formeln (1) fick fram alla sträckorna x_k. Hade man försökt med $w_k = 2^k \cdot \alpha$, hade endast x_6, x_4, x_2 och x_8 erhållits. Om N ej är ett primtal, kan formeln

$$w_k = m^k \cdot \alpha \qquad (10)$$

ej ge alla multipler av vinkeln α. Om t. ex. $N = 2^3 + 1 = 9$ och m är delbart med 3, får man endast de vinklar, som äro multipler av 3α, ty minskningen med en multipel av 360° medför ingen ändring, eftersom 360° är en multipel av 3α. Och om m ej är delbart med 3, får man ej någon av de vinklar, som äro multipler av 3α, ty i $m^k \cdot \alpha - p \cdot 360^\circ$ är ej den förra men väl den senare termen en multipel av 3α. Däremot kan man visa, att om N är ett primtal, är det alltid möjligt att välja en bas m, så att formeln (10) ger samtliga vinklar. För att den här använda metoden skall kunna tillämpas för konstruktion av en regelbunden N-hörning, fordras således, att N har formen $2^n + 1$ och är ett primtal. De närmaste N-värdena efter 17 äro $N = 2^8 + 1 = 257$ och $N = 2^{16} + 1 = 65\,537$.

Tekniska Högskolans nya fysikinstitut.

Av G. BORELIUS.

Den fysiska institutionen vid Tekniska Högskolan har under det gångna året flyttat över från de gamla lokalerna vid Drottninggatan till högskolans nya byggnader vid Valhallavägen i Stockholm. Någon ny tillbyggnad har ej ägt rum för fysikens räkning utan endast en inredning av de lokaler, som, redan då den nya högskolan byggdes för cirka femton år sedan, avsågos för fysikinstitutionen, och som under tiden delvis stått oinredda, delvis använts för tillfälliga ändamål. I det följande skall lämnas en kort redogörelse för vissa detaljer i inredningen, vilka, i vissa fall utförda efter utländska mönster, torde vara nya eller mindre vanliga hos oss. Den allmänna planeringen av institutionen, som kanske mindre intresserar tidskriftens läsare, skall endast flyktigt beröras.

Institutet, som är byggt på berggrund och saknar källare, omfattar tre våningar. Bottenvåningen innehåller utom en rymlig verkstad och ackumulatorrum sex arbetsrum för specialarbeten förlagda längs en korridor. Våningen en trappa upp innehåller det allmänna övningslaboratoriet jämte expeditionsrum för assistenterna och professorn samt ett större rum för samlingar och handbibliotek, som även användes som tentamensrum. Två trappor upp befinner sig hörsalen med preparationsrum samt fyra arbetsrum, vilka även här ligga längs en korridor.

De tio arbetsrummen äro inredda på i stort sett samma sätt. Bild 1 visar den normala utrustningen av de vinkelrätt mot fönstervägen gående väggarna i dessa rum. På väggen finnas uttag för belysningsström, 50-periodig växelström och likström från stadens nät, vidare för ackumulatorström,

gas och vatten. Uttagningsplinten för växelström har tre faser och nolla, och därifrån kan alltså erhållas såväl enfasström om 220 eller 127 volt som trefasström. Likströmsplinten har spänningarna — 220, 0 och + 220 volt. Institutets ackumulatorbatteri, som har 56 ampères laddningsström, är uppdelat i 12 grupper om 20 volt. Från en fördelningstavla intill verkstaden kan dessa grupper fördelas

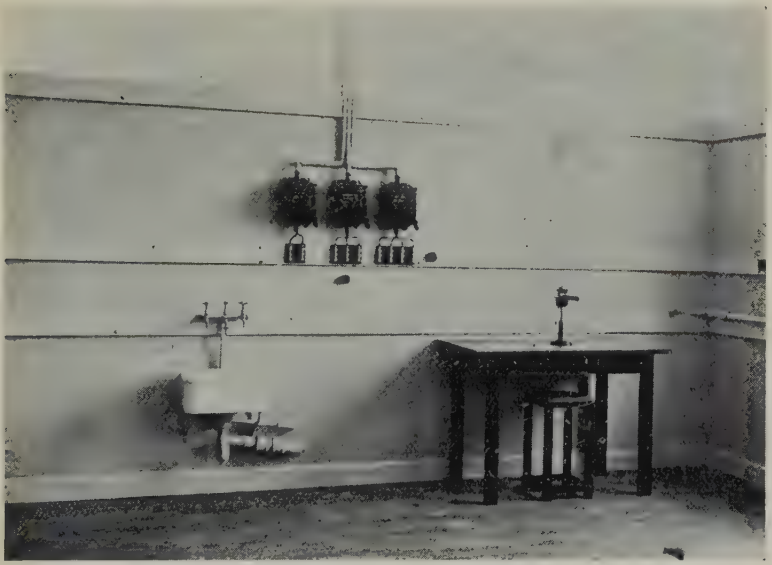


Bild 1. Vägg i arbetsrum.

på arbetsrummen (samt övningslaboratoriet och hörsalen), så att man från plintarna för ackumulatorström kan erhålla multipler av 20 volts spänning. Varje arbetsrum har därvid sin separata ledning från fördelningstavlan. Vidare finns möjlighet att genom i mellanväggarna insatta rör låna ström från angränsande rum. Strömbrytare äro placerade strax intill alla uttagsplintar, så att spänningen lätt kan slås ifrån, när kopplingar skola göras å dessa. Vatten och avlopp äro framdragna till mitten av väggen, vilket har stora fördelar framför den vanliga placeringen av vaskarna inne i hörnen.

Alla väggar i arbetsrummen äro försedda med monteringslister av trä, som äro stadigt fästade, vid tegelmurarna med hjälp av plugg, vid plattväggar med genomgående bult. Den nedersta listen är samtidigt golvsockel, den andra befinner sig strax över bordshöjd, den tredje bär uttagsplintarna och den fjärde går fritt över dörrarna. Listerna möjliggöra bekväm montering av ledningar, skjutmotstånd, belysningsanordningar, instrumenthyllor, elektriska tavelinstrument o. a. med hjälp av träskruv, varför särskilda håltagningar och proppningar i väggarna nästan aldrig behöva förekomma. Anordningen är sålunda till mycket stor nytta och har under de senaste åren kommit till utförande vid flera institutsbyggen.

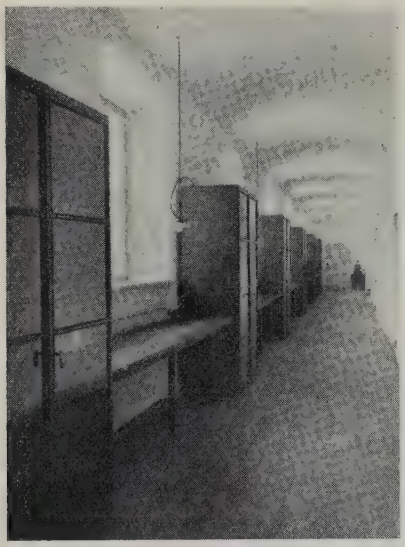


Bild 2. Korridor med instrumentskåp och fasta arbetsbord.

Korridorerna utanför arbetsrummen äro, såsom framgår av bild 2, utrustade med instrumentskåp och fasta arbetsbord. Vid vart och ett av dessa finns gasuttag och stickkontakter för likström och växelström.

Övningslaboratoriet omfattar den å bild 3 synliga större salen, en mindre sal (delvis synlig genom dörren i fonden) och två intill dessa liggande mörkrum. På laboratoriet kan apparater till cirka 40 övningsförsök stå permanent framställda. För distribution av elektrisk ström till arbetsborden i mitten av den stora salen har här uppsatts en rad enkla träpelare, en anordning, som har stora fördelar framför det annars vanliga systemet med från taket nedhängande pendlar.

Hörsalen (bild 4), som f. ö. icke är enbart avsedd för fysikundervisningen, rymmer 264 fasta sittplatser. Golvytan framför den främsta bänkraden är i ett plan och har framför svarta tavlan ett djup av 4 meter. I mitten finnes därtill en inskärning i främsta bänkraden, så att djupet här blir över 5 meter. Till skillnad från de flesta äldre fysikhörsalar finnes varken det vanliga fasta och inventiösa

Bild 3. Övningslaboratoriet.

experimentbordet eller den väggfasta fördelningstavlan med reglerbara motstånd. För uppställning av demonstrationsapparaterna användas dels de å bild 4 synliga lätt förflyttbara rullborden, dels vanliga mindre arbetsbord och specialstativ. För lätt tillgång till elektricitet, gas orh vatten är sörjt genom uttag dels på båda sidor om svarta tavlan dels i den nämnda inskärningen i främsta bänkraden.

Utbytet av det fasta experimentbordet mot mindre, lättrörliga bord har i själva verket mycket stora fördelar. Man kan på ett bättre sätt disponera utrymmet och erhåller

mera överskadliga uppställningar. Föreläsaren kan själv hastigt göra stora omflyttningar. Är salen starkt upptagen, kunna borden iordningställas i det angränsande preparationsrummet. Det förefaller som om ett dylikt utbyte även med fördel skulle kunna göras i mindre hörsalar och i skolornas fysikrum. Framvaron av en fast fördelningstavla synes heller icke vålla några som helst svårigheter. För

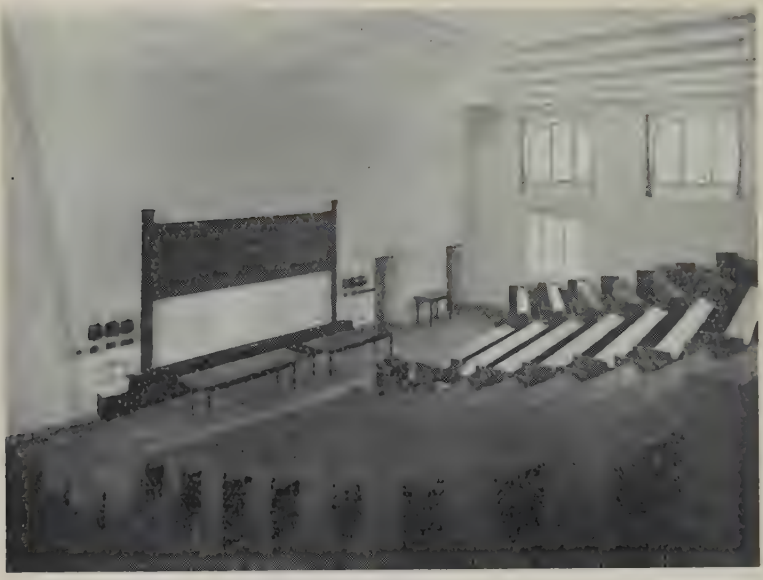


Bild 4. Hörsalen.

reglering av ström och spänning har man ju numera lätta motstånd och transformatorer, och dessa bör man bäst till hands på bordet tillsammans med övriga apparater. Man vinner också genom att ansluta till en vanlig väggkontakt bättre överensstämmelse med vanliga laboratorieförhållanden och undgår att ge åhörarna den föreställningen att en stor marmortavla är det nödvändigaste av allt vid arbete med elektrisk ström.

Den svarta tavlan är anordnad så, att salens framvägg även blir på bästa sätt användbar för projektionsändamål.

Tavlan kan sänkas nästan ända ned till golvet och lämnar därvid en centralt och icke alltför högt belägen del av den vita väggytan fri för projektion av bilder från ett skioptikon, som är uppställt på en avsats cirka 12 meter från väggen. Tavlan kan emellertid även höjas så högt, att den lämnar en 12 dm hög yta av väggen fri mellan sin underkant och krithyllan. Denna yta användes för projektion från ett epidiaskop i höjd med första bänkraden (på bild 4 är projektionsapparaten i funktion) eller för projektion vid de fysikaliska experimenten. För att undvika skymmande stödpelare i det centrala väggfältet, har det varit nödvändigt att utföra svarta tavlan i ett enda 5 meter långt stycke. Den manövreras elektriskt med hjälp av en stång, som löper över krithyllan i hela dess längd och verkar på tryckknappar vid ändarna. En tryckning åt höger eller vänster sätter tavlan i rörelse uppåt resp. nedåt. Möjlighet finnes vidare också för vertikal projektion genom att en rund projektionsyta med 4 meters diameter är anbrakt i taket över experimentplatsens mitt med en svag lutning uppåt ut mot salen.

Planen för institutets inredning har utarbetats av högskolans arkitekt professor LALLERSTEDT och för den elektriska utrustningen av 1:e assistenten ingeniör C. H. JOHANSSON.

Praktiska atomvikter 1931.

Den tyska atomviktskommissionen har publicerat sin elfte berättelse och redogör däri för under 1930 utförda atomviktsbestämningar. Dessa anses motivera tre ändringar, nämligen för *arsenik*, som får atomvikten 74,$_{93}$ (förut 74,$_{96}$), *tantal* 181,$_{36}$ (förut 181,$_{5}$) och *renium* 186,$_{31}$ (förut 188,$_{7}$).

Inga andra ändringar ha gjorts i 1930 års tabell, återgiven i denna tidskrifts marshäfte s. å. och tillgänglig i särtryck på kartong vid rekvisition hos redaktionen.

Till kommissionens intressanta redogörelse för 1930 års isotopforskning blir måhända senare tillfälle att återkomma.

G. Starck.

Bokanmälningar.

R. W. Pohl, *Einführung in die Physik, Mechanik und Akustik.* Julius Springers förlag, Berlin 1930, 250 sid., inb. RM 15:80.

Andra delen av professor Pohls »Einführung», behandlande elektricitetsläran, har utkommit tidigare än den första och har varit föremål för recensioner i denna tidskrift (Årg. **11**, s. 237 och **13**, s. 44). Den nu utkomna första delen omfattar mekanik och akustik. Planen och uppställningen är ungefär densamma som i den förra delen. Den originalitet och klarhet, som gjort den berömde experimentalfysikern till en verklig banbrytare inom den pedagogiska fysikens områden, återfinna vi även i det nu utkomna arbetet. Gamla sanningar, klädda i ny och lätt begriplig form, och nya sanningar, åskådligt och övertygande framställda, möta oss överallt i boken. Att avhandla allt gammalt och dessutom upptaga nya försök och nya synpunkter till behandling är naturligtvis icke möjligt utan alltför stor vidlyftighet. Författaren har därför uteslutit en hel del av vad som sedan gammalt är väl känt för att bättre få plats för nya och mindre kända försök. De grundväsentliga frågorna strävar författaren att ingående belysa. Att t. ex. ingen kropp är absolut fast visar han genom en på ett stadigt bord uppställd enkel optisk anordning, som är så känslig, att när bordet lätt beröres med ett finger, en ljusfläck flyttas på en skala. Ett område, som hittills ägnats föga uppmärksamhet i skolfysiken, men för vilket väl någon plats snart måste beredas, är kapitlet om gasers och vätskors rörelse. Virvelrörelser i allmänhet, flygproblemet, Flettnerrotorn m. m. torde icke längre kunna skjutas åt sidan. Utomordentligt goda och instruktiva försök och bilder har författaren att erbjuda till belysande av dessa frågor. Vågrörelsen med dess tillämpningar på akustiken demonstreras genom ett stort antal särdeles vackra försök.

Åtskilliga av de Pohlska apparaterna visades av en representant för firman Spindler och Hoyer, Göttingen, vid sammanträden med fysiska sällskapen i Stockholm och Uppsala sistlidna termin. Bland annat visades ett särdeles vackert experiment med vars tillhjälp Pohl gör det möjligt att för ett större auditorium demonstrera de fenomen, vartill vågrörelser kunna giva upphov.

Vattenvågorna i ett kärl med glasbotten projicieras mot taket i föreläsningssalen. Tänkvärda ord har författaren i inledningen att säga beträffande inredningen av fysiska lärosalar. För dem, som ha anledning att sysselsätta sig med denna fråga, måste ett besök hos professor Pohl i Göttingen vara mycket givande. Som rektor Hallström i sin recension av den del, som handlar om elektricitetsläran, påpekat, kan man nog icke obetingat godkänna alla författarens deduktioner och metoder. Som helhet betraktat måste dock Pohls arbete betraktas som ett av de allra värdefullaste för den elementära fysikundervisningen, som hittills sett dagen. För den som är intresserad av experimentalfysik och vill finna nya idéer och synpunkter är Pohls arbete en verklig guldgruva.

T. E. Aurén.

Kosmos, *Fysiska uppsatser*, Bd 8, Utgivna av Svenska Fysikersamfundet. P. A. Norstedt & Söner (i distribution) Stockholm 1931, 213 sid. I bokhandeln häft. kr. 10: —. Medlemskap, årsavg. kr. 10: —, medför rätt till ett bundet ex. Anmälan till prof. G. Borelius, Tekniska Högskolan, Stockholm.

Av Svenska Fysikersamfundets årsbok Kosmos har nu utkommit ett nytt band, det åttonde i serien, med som vanligt rikhaltigt och intressant innehåll. Volymen inledes med skildringar av två vetenskapliga livsverk, Allvar Gullstrands av professor H. Gertz och Wilhelm Wiens av laborator B. Beckman.

Docent E. Bäcklin skriver om mätningar av röntgenstrålars våglängder i absolut mått med hjälp av plana reflexionsgitter. Dessa mätningar äro av största vikt ej blott för anslutningen av den inom röntgenspektroskopin brukliga »kristallskalan» till den absoluta utan även för beräkningen av kristallers gitterkonstant och därmed även av Avogadros tal och — oberoende av Millikans bestämning — av elementarladdningens storlek. Förf. diskuterar egna och andras mätningsresultat; de flesta ge för elementarladdningen ett något större värde än Millikans ($4{,}774 \times 10^{-10}$). Bäcklins eget värde är $4{,}793 \times 10^{-10}$. Möjligheten att avvikelsen beror på kristallfel påpekas dock.

Docent E. Hogner lämnar en redogörelse för våggruppers teori, grupp- och fashastighet i samband med dispersion m. m. Avhandlingen är särskilt värdefull, emedan förf. klart och lättfattligt redogör för vågmekanikens grundbegrepp.

Professor E. Hulthéns artikel om de fleratomiga molekylernas ultraröda frekvenser ger en god bild av det rikhaltiga material om molekylernas band- och ramanspektra som insamlats samt av de härav dragna slutsatserna om byggnaden av ett stort antal molekyler.

Professor O. Klein ger en ytterst intressant redogörelse för Niels Bohrs tankar om naturlagarnas väsen. Som bekant kan man ej på de atomära processerna tillämpa kausallagen i dess från den klassiska fysiken kända form: att en tillräckligt noggrann kännedom av ett systems tillstånd principiellt möjliggör en godtyckligt noggrann förutsägelse av dess framtida utveckling. Detta sammanhäger intimt med omöjligheten att iakttaga t. ex. en atoms rörelse utan att genom själva iakttagandet störa rörelsen, varför en noggrann förutsägelse av den fortsatta rörelsen är omöjlig. Endast sannolikheten för olika möjliga banor kan beräknas. — I denna artikel hade det möjligen varit önskvärt med en hänvisning till docent Hognérs ovannämnda artikel.

Docent F. Lindholm beskriver utförligt metoder och resultat vid mätningar av den genomträngande kosmiska strålningen, dess variation med höjd över havet, sol- och stjärntid, lufttryck m. m. Frågan om strålningens ursprung och karakter av våg- eller korpuskularstrålning kan ännu ej anses avgjord.

Professor H. Lunelund redogör för sina mångåriga mätningar av värmestrålningen från sol och himmel på olika orter i Finland. Resultaten sammanställas i åtskilliga diagram och tabeller och jämföras med liknande mätningar i Sverige.

Professor M. Siegbahns artikel behandlar de synnerligen eleganta metoder, som i Uppsala användas för att utforska det tills för få år sedan nästan helt okända området mellan kortvågigaste ultraviolett och längsta röntgenvågor, en lucka, som 1925 räckte ungefär från 25 till 150 ÅE men som nu helt täckts, med konkavgitter ned till 75 ÅE och med plangitter upp till 115 ÅE. Plangittren ha ritsats med en av förf. konstruerad, mycket väl arbetande delningsmaskin. Två nya vätelika spektra, Li III och Be IV ha kunnat fotograferas med vakuumgnista. Upplösningsförmågan är tillräcklig för att ge såväl fin- som hyperfinstruktur hos flera linjer.

Årsboken avslutas med en artikel av fil. lic. G. Stenvinkel, vilken behandlar de spektroskopiska isotopundersökningarna, värdefulla både för upptäckten av isotoper hos flera lätta ämnen (Be, C, N och O) samt för kännedomen om bandspektra, t. ex. nödvändigheten att införa halvtaliga kvanttal. *Sven Benner.*

Ernst Herlin, *Elektricitet till husbehov.* Svenska bokförlaget, Stockholm 1930, 164 sid., kr. 2: 75.

Lektor Herlin har som populärvetenskaplig föreläsare och författare ett väl befäst anseende, och med ovanstående arbete har han ytterligare säkrat sin rangställning. Anmälaren vet sig

icke tidigare med sådant nöje ha tagit del av en populär framställning av elektriciteten. Efter en livfullt tecknad historisk översikt — »från bärnstenen till kraftstationen» — följer redogörelse för den elektriska strömmens framställning, egenskaper och verkningar, och den sista och största avdelningen ägnas åt elektriciteten i hemmet. Man kan icke undgå att frapperas av författarens goda väderkorn för allt nytt. Följande axplockning ur rubrikerna må ge en föreställning om innehållets rikhaltighet: belysningsfrågan (lämplig och olämplig belysning), elektriska spislar, varmvattensberedare, kaminer, kylskåp, köksmotorer, dammsugare, kvartslampor, högfrekvensapparater, radio, elektrogrammofonen, television, elektricitetens faror.

Man måste vara författaren mycken tack skyldig för denna bok, som har en stor uppgift att fylla och som tack vare den ypperliga och lättfattliga framställningen, beledsagad av ett utmärkt bildmaterial, förtjänar en stor spridning.

Torsten Wetterblad.

Liv och materia, Läsebok för skola och hem. Utgiven av Ivar Sefve. Svenska Bokförlaget, Stockholm 1930. Två delar à kr. 3: 75 och resp. 397 och 364 sid.

Under detta namn utger Svenska bokförlaget en ny »läsebok för skola och hem». Arbetet avser att fylla behovet av en modern naturvetenskaplig läsebok inom folkskolan och dess överbyggnader såväl som i läroverken och de kommunala mellanskolorna.

Man måste med största glädje hälsa varje försök att ge ungdomen en läsebok av detta slag. En sådan bok behöves väl för att fylla ut det knapphändiga lärostoff, som medhinnes under lektionstimmarna. För att motsvara sitt ändamål bör den då kunna sättas i de intresserades händer till självstudium, och den bör fördenskull vara skriven så lättfattlig, att de unga läsarna utan alltför stor ansträngning kunna tillgodogöra sig dess innehåll. Den får icke ge en läroboksmässig samling data utan bör vara skriven med en viss bredd. Med tanke på den stora läsekrets arbetet vänder sig till, böra dess sakliga uppgifter vara absolut tillförlitliga och överensstämma med den moderna vetenskapens resultat.

Det är förvisso ingen lätt uppgift att skriva ett sådant verk. Man kan nämligen inte räkna med att sakkunskapen alltid med sig förenar gåvan av populariseringens svåra konst. Och omvänt kan det hända, att den som har förmågan att uttrycka sig på ett lättfattligt sätt, ej tillräckligt behärskar ett ämne, där vetenskapen gjort nya och snabba framsteg. Än större bli dessa svårigheter,

när såsom i detta fall arbetet vänder sig till läsare med rätt olika förkunskaper.

Till vilken av ovannämnda kategorier en författare än må höra, bör han känna en viss tillfredsställelse och säkerhet, om han får sitt opus granskat. Den framstående vetenskapsmannen eller teknikern bör inte ha skäl att motsätta sig, att hans givetvis klara men för en ungdomlig läsare kanske väl koncentrerade skrivsätt får en bearbetning av en medhjälpare, vars stil är mer lättfattlig. Och en författare av det senare slaget bör tacksamt mottaga vetenskapsmannens eller teknikerns granskning av det sakliga innehållet. Ett samarbete bör sålunda vara av stort värde, när det gäller en läsebok som den nu föreliggande.

Dessa mina reflexioner gälla särskilt den nya läsebokens första del, som behandlar meteorologi och klimatlära samt kemi och fysik. Det är områden, som äro svåra att popularisera, och där vetenskapen gått framåt med stormsteg. Vid en hastig genomläsning av det fyrtiotal uppsatser, som den första delen innehåller, får man det intrycket, att de i stort sett motsvara de berättigade anspråk, som kunna ställas på en läsebok av detta slag, även om en bearbetning och granskning av ovan antydd art nog skulle ha gjort boken ännu bättre och bl. a. avlägsnat en del faktiska fel, som nu tyvärr störa framställningen.

Så är exempelvis den skildring av jordatmosfärens sammansättning, som kommer till synes i uppsatsen om luften, icke överensstämmande med den nutida uppfattning, som framtvingats bl. a. av norrskensforskningens resultat. Den i detta sammanhang lämnade uppgiften, att helium skulle vara lättare än vätgas, är ett gåtfullt misstag, och när författaren framhåller ozongasen som mycket »flyktig», torde han avse, att denna gas kan vara obeständig. De meteorologiska och klimatologiska uppsatserna, som utgöra en dryg fjärdedel av första bandets innehåll, uppvisa nog ännu några misstag eller rena skrivfel, men deras läsvärdhet förringas icke nämnvärt därigenom, skrivna som de äro av Axel Walléns skickliga penna.

De kemiska uppsatserna av Ragnar Widman, John Lundberg, Georg Böös och S. E. Sterzel behandla sprängämnen, gödningsmedel, sodaindustrien, gasverk, tjärfärger, petroleum, cellulosaindustrierna samt järn och stål. Mot deras innehåll kan ingen allvarligare anmärkning göras än att de i några fall kanske blivit väl detaljrika utan att samtidigt vara tillräckligt beskrivande, vilket dock torde förklaras av att författarna endast haft ett relativt litet utrymme att disponera över.

Fysiken upptar nästan hälften av bokens innehåll. Här ha ett

par specialproblem, kullager och flygning, på ett utmärkt sätt behandlats, det ena av SIMON WERNER, det andra av TORD ÅNGSTRÖM. ALBERT BJÖRKESON har skrivit om materiens byggnad, atomernas struktur, strålande energi och ljudet. Tillsammans med EJNAR JONSSON har SIMON WERNER behandlat ångmaskiner och andra värmemotorer samt elektrisk energi och energiöverföring, varemot SIMON WERNER ensam svarar för en uppsats om världens energikällor och EJNAR JONSSON för tre uppsatser: mekanikens gyllene regel, fotografering och budskap genom etern. Mot denna fysikaliska avdelning måste tyvärr en del sakliga anmärkningar göras. Särskilt den sistnämnda uppsatsen, som behandlar trådlös telegrafi och telefoni, företer allvarliga felaktigheter i såväl text som bilder.

Störande verkar det även att i fysikaliska uppsatser se komma utsatt efter tusental och punkt efter sådana förkortningar som kg, cm, kgm o. d. Men i det fallet ha våra sätterier sin egen uppfattning, som endast kan rubbas, om författaren är envis vid korrekturet.

Även en andra del av »Liv och materia» har utkommit. Den innehåller uppsatser i geologi av LENNART VON POST och skildringar ur djurvärlden av WILHELM BJÖRCK, SVEN EKMAN, NILS ROSÉN, EINAR WAHLGREN och IVAR SEFVE, vilken sistnämnde är redaktör för hela verket. Otvivelaktigt äro dessa områden av naturvetenskaperna lättare att populärisera än den första delens. Jag har läst denna andra del så, som de tilltänkta läsarna skola göra det, d. v. s. med ringa sakkunskap, och den har fångat mitt intresse i allra högsta grad.

I den tredje delen, som är under tryckning, skall växtvärlden skildras, varjämte andra biologiska problem, såsom ärftlighetsläran och vissa delar av människokroppens fysiologi, skola avhandlas.

Även om några invändningar kunna göras mot detaljer i den första delens innehåll, kunna dessa anmärkningar dock icke sägas vara av den art, att de förringa arbetets stora värde i övrigt. »Liv och materia» bör kunna bli omtyckt icke endast av skolungdomen utan även av hela den intresserade allmänheten.

Ernst Herlin.

IWAN BOLIN och BROR GUSTAVER, *Lärobok i kemi för folkskoleseminarier och praktiska skolor.* Tidens förlag, Stockholm 1930, 276 sid., 57 ill. Kr. 5: 50.

Ovanstående arbete innehåller enligt företalet en kemikurs motsvarande realskolans men något bredare lagd. Då den är avsedd

för mognare läsare än realskolans elever, ha flera kapitel lämpliga för självstudier medtagits.

Boken behandlar på 142 s. den oorganiska kemien, på 71 s. den organiska jämte fysiologisk kemi, ägnar därefter 12 s. åt radioaktivitet och atomteori för att till slut ge en framställning av den tekniska kemien på 43 s.

Utöver den framställning av kemiens grunder, som motsvarar realskolans kurs, innehåller boken en populär redogörelse för kemien av i dag, dess senaste landvinningar på teknikens område och dess ingripande i vårt dagliga liv. Gränsområdena mot biologi, geografi och fysik ha behandlats åtskilligt utförligare än vanligt är i elementära kemiska läroböcker.

Den stora mängd av ofta svåråtkomligt material, som härigenom medtagits, har dels samlats i särskilda kapitel, som i mån av behov kunna utelämnas vid undervisningen, dels inarbetats i den mer elementära framställningen. Denna har på så sätt blivit mer intresseväckande men också, särskilt för elever utan förkunskaper, svårare att smälta.

Den som verkligen tillgodogjort sig bokens rikhaltiga innehåll, har fått en kemisk allmänbildning, som den vanliga realskolekursen icke kan ge.

Meningarna kunna kanske vara delade om lämpligheten av att på det stadium, som boken är avsedd för, medtaga en del av det rikliga stoff, som här samlats, men bortsett härifrån ger sakinnehållet få anledningar, åtminstone för rec. att anmäla avvikande mening. Några anmärkningar inklusive tryckfel må dock anföras.

S. 7. »enkelt arbete» i st. f. enskilt.

S. 53. Ett provrör fylles med väte från en natriumbit av ett knappnålshuvuds(!) storlek.

S. 58. »Vanligen framställes klor genom elektrolys av saltsyra». Bör väl vara koksaltlösning.

S. 61. Svartfärgningen vid koppars upplösning i konc. svavelsyra kan väl icke andragas till stöd för intermediär bildning av CuO. Det svarta ämnet torde vara sulfid.

S. 95. »Kiselsyrans utdrivande ur dess lösliga salter har dock ingenting med syrans styrka . . . att skaffa». Som svagt dissocierad syra skulle kiselsyran bildas, även om den vore löslig.

S. 108. »Weaston» i st. f. Weston.

S. 114. $CrCl_2$ anföres som analog med H_2S.

S. 120. »Alkalimetallerna, vilkas föreningar nästan undantagslöst äro lösliga, förekomma i form av lättlösliga salter.» Största mängden av alkalimetallerna lär väl finnas i form av olösliga silikat.

S. 120. »magna» i st. f. magma.

S. 127. De hydratiska järnmalmerna undantagas från de viktiga malmerna. Minettmalmerna i Lothringen torde lämna c:a 25 % av världsproduktionen av järn.

S. 147. »fällningen av silverhydroxid». Hydroxidens förekomst under dessa omständigheter är väl diskutabel.

S. 151 och 203. »brun ferrin» har av rec. uppfattats som tryckfel för farin.

S. 151. »Sedan dess har man lyckats syntetiskt framställa så gott som alla i organismer förekommande ämnen». Jfr s. 198.

S. 197. Atropin. »Det är oerhört giftigt, 1 mg är dödlig dos för en människa.» Troligen förväxling med medicinsk maximaldos; *nus* i st. f. *nux*.

S. 205. Ferrocyankopparmembran. »Denna är permeabel för de små molekylerna av vattnet och däri lösta salter men hindrar större molekyler» etc. Membranen är knappast permeabel för lösta salter.

S. 220. »fluorescera, d. v. s. de utsända ljus en tid, sedan de själva varit belysta.» Definitionen lär väl inte allmänt godtagas.

S. 234. »... NO_2. Denna omsättes därefter med vatten till salpetersyra.» Orden »och luft» borde ha inskjutits efter vatten.

S. 244. Klinker torde väl vara sintrat tegel, vare sig eldfast eller ej.

S. 253. »... zinkens smältpunkt, som är 900°.» Skall vara kokpunkt.

Dessa anmärkningar träffa ju rätt oväsentliga detaljer. Språkfel saknas praktiskt taget. Allt vittnar om en mycket grundlig överarbetning. En del upprepningar kunde dock ha undvikits.

För många praktiska skolor bör denna verkligt goda lärobok vara mycket välkommen. Dess lämplighet för seminarierna kan rec. i avsaknad av erfarenhet ej bedöma. För läroverkens del bör den bli till glädje för såväl lärare, vilka här säkert kunna finna givande synpunkter och goda försök, som för intresserade elever både i realskolan och gymnasiet.

En förkortad upplaga, *Kemi för realskolor och kommunala mellanskolor* fördelad på två delar — I. Oorganisk kemi, 90 sid., kr. 1:25; II. Organisk och teknisk kemi, 62 sid., kr. 0:85 — kan, liksom det större arbetet, kort karakteriseras som ett verkligt originalarbete, en modern, korrekt, välskriven och intresseväckande lärobok.

Erik Löwenhamn.

Gradualavhandlingar.[1]

Ragnar Nilsson, *Studien über den enzymatischen Kohlenhydratabbau.* Sv. Vet. Akad. Arkiv för Kemi, Bd. 10 A, N:o 7 (1930), 135 sid. Disp. vid Stockholms Högskola den 19 mars 1930. Opponenter: laborator Karl Myrbäck och fil. lic. Edvard Brunius.

I motsats till äldre teorier påvisar förf., att fluoridverkan vid jäsning och glykolys ej kan förklaras genom en hämning av hexosdifosforsyrespaltningen. I stället uppsättes följande hjälphypotes: Genom fluoridförgiftningen förhindras den för jäsning och glykolys gemensamma reaktion, vid vilken cozymasen medverkar. Denna reaktion antages vara hexosmonofosforsyrans övergång till hexosdifosforsyra. Denna uppfattning stödes genom påvisandet, att vid polysackaridnedbrytningen hexosmonofosforsyrebildningen försiggår utan medverkan av cozymas, samt att hexosmonofosforsyrans vidare omsättning förhindras av fluorid. Vid glukosnedbrytningen förhindras genom fluoridförgiftning även hexosmonofosforsyrebildningen. Denna olikhet förklaras därigenom att polysackariderna vid sin spaltning till hexos, vilken sker oberoende av den vidare nedbrytningen, bilda hexosens förestringsform. Vid glukosens nedbrytning föreligger däremot ett jämviktsläge mellan förestringsform och vanlig glukos. Om hexosmonofosforsyrans vidare omsättning hindras, t. ex. genom fluoridförgiftning, tillbakatränges därigenom även hexosmonofosforsyrebildningen. Vid studiet av acetaldehyddismutationen i jäst visade sig, att acetaldehydens omvandling i jästen ej, som man förut antagit, består i en ren acetaldehyddismutation utan i en blandad oxido-reduktion mellan acetaldehyden och jästens kolhydrat. Acetaldehyden reduceras därvid kvantitativt till alkohol. Någon ättiksyrebildning äger icke rum, däremot bildas en icke flyktig syra. Samtidigt härmed inträder en stark fosforylering. Ur reaktionsblandningen isolerades (över strykninsaltet) en fosforsyreester av monofosfoglycerinsyrans sammansättning. Reaktionsmekanismen vid bildandet av denna syra anser förf. vara en oxido-reduktion mellan acetaldehyd och hexosmonofosforsyra, varvid acetaldehyden reduceras till alkohol och hexosmonofosforsyran oxideras vid fjärde kalatomen. Denna nya uppfattning av acetaldehydens omsättning i jäst ger även förklaring av de

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

olikheter, som i tidigare undersökningar framkommit mellan acetaldehydomsättningen, mätt såsom acetaldehyddismutation, och metylenblåttreduktionen. I frånvaro av fosforsyra uteblir acetaldehydreduktionen i jäst. Fosforsyran kan i detta fall ersättas med arseniksyra. Dock inträder härvid den olikheten, att medan i närvaro av fosforsyra, som nämnt, en kraftig fosforylering äger rum, kan något försvinnande av den fria arseniksyran inte påvisas. — Med ett torrpreparat av en till galaktos anpassad jäst kunde galaktosens fosforylering påvisas. De därvid bildade fosforsyreestrarna, en hexosdifosforsyra och en hexosmonofosforsyra, isolerades. Hexosdifosforsyran visade sig vara identisk med den hexosdifosforsyra, som bildas ur de direkt förjäsbara sockerarterna. Hexosmonofosforsyran var däremot inte identisk med någon känd ester.

Fritz Thorén, *Zur Kenntnis der katalytischen Zersetzung von Wasserstoffsuperoxyd mit kolloidalem Platin*, Stockholm 1930, 135 sid. Disp. vid Stockholms Högskola den 22 mars 1930. Opponenter: docent Arne Ölander och fil. lic. Harry Arnfelt.

Den kolloidala platinans förmåga att sönderdela vätesuperoxid undersöktes vid medelst högfrekvensförstoftning erhållna hydrosoler, vilka visade sig dubbelt så aktiva som de Bredigska. — Solerna själva gåvo vid röntgenundersökning inga interferenser, men koagulat gåvo endast från *Pt* härrörande linjer. — Kinetiska undersökningar gåvo vid handen, att funktionssambandet mellan logaritmen för den aktuella H_2O_2-koncentr. vid katalysen och tiden, kan med god approximation framställas som en bruten rät linje. Detta tyddes så, att katalysatorn under sin verksamhet tämligen oförmedlat förminskade sin aktivitet. Inom varje verksamhetsperiod följdes tämligen väl den monomolekylära tidsekvationen. I vissa fall utebliva deaktiveringarna. I allmänhet kunna tre verksamhetsskeden urskiljas vid katalysen. Den första varar i medel till ungefär 11 min., den andra till ungefär 30 min. efter reaktionens början. Märkligt nog förhålla sig de tre tidskonstanterna i medeltal som 6 : 4 : 3. — Förhandsutspädning av solen minskade starkt aktiviteten. — Försök att fastställa en affinitetskonstant mellan katalysator och H_2O_2 gåvo negativa resultat. — Vid centrifugering minskades solernas aktivitet starkt. — Adsorbtionskol närvarande vid katalysen stegrade aktiviteten, under det att kaolin minskade den. Vätgas aktiverade solerna, men mindre vid långvarig behandling än vid kortvarig. När aktiviteten förändras, sker detta starkast vid första verksamhetsperioden. — Medelst kinhydronelektroden bestämdes solernas p_H till 5, 6 — 5, 0.

— Starka skäl framfördes mot antagandet, att en syrehalt i den kolloidala platinan skulle betinga aktiviteten, likaledes mot att föroreningar av främmande metaller skulle göra det; det senare på grund av molekylarkinetiska betraktelser.

Axel Wejnarth, *Beiträge zur Kenntniss der elektrothermischen Zinkgewinnungsmethode*, Stockholm 1930, VIII + 146 sid. Disp. vid Tekniska Högskolan i Stockholm den 29 mars 1930. Opponenter: prof. K. W. Palmær och bergsing. I. Bohm.

Arvid Palmgren, *Undersökningar rörande statiska bärförmågan hos kullager.* Tryckt i Göteborg 1930, 48 sid. Disp. vid Tekniska Högskolan i Stockholm den 15 maj 1930. Opponenter: prof. W. Weibull och bergsing. Bengt Kjerrman.

Avhandlingar och uppsatser i läroverkens årsredogörelser 1929—30.

Gunnar Starck, *Uppgifter för de obligatoriska laborationsövningarna och det enskilda arbetet i kemi.* H. reallärov. å Norrmalm, Stockholm. (7 sid.)

G. Troedsson, *Bidrag till Hälsingborgstraktens geologi.* H. allm. lärov. i Hälsingborg.

K. A. Wingårdh, *Integralkalkylens tillämpning på beräkning av ytor och båglängder* samt *Grunderna av läran om differentialekvationer.* H. allm. lärov. i Falun. (20 sid.) Utgör fortsättning på *Utvidgad kurs i differential- och integralräkning,* som inflöt som bilaga i läroverkets årsred. 1927—28.

Helge Bohlin, *Undersökning rörande den skivformiga virvelströmsbromsens verkningssätt.* (30 sid.) Tekniska lärov. i Härnösand.

Sven Elvius, *Landhöjningen i Västeråstrakten efter stenåldern.* Elektrotekniska fackskolan i Västerås.

Oscar Ericson, *Om stenkolsgruvor.* Tekniska lärov. i Malmö.

K. H. G. Lindroth, *Elektrokardiografen och dess användning i hjärtdiagnostiken.* (19 sid.) Göteborgs östra realsk. Separat kr. 1: —.

Föreläsningar för lärarkandidaterna vid provårsläroverken under läsåret 1929—30.

Höstterminen 1929.

Göteborg: lektor B. E. Möller, Metodiska föreläsningar i matematik (6 t.); slöjdlärare G. H. Gustavsson, 2 metodiska förel. och 10 övningar i framställning av apparater för undervisningen i fysik.

Lund: Metodikförel. i fysik (2 t.) av lektor G. Forsström och i kemi (2 t.) av adjunkt K. Parck.

Stockholm: lektor A. Wahlgren, Geografi- och fysikproblem i matematiken (2 t.); lektor T. Wetterblad, Läran om ljusets interferens, böjning och polarisation (2 t.); lektor G. Starck, Kemiundervisningen enl. de nya undervisningsplanerna (2 t.); adjunkt Hj. Sandstedt, Talen och måtten vid geografiundervisningen (1 t.).

Vårterminen 1930.

Göteborg: lektor B. E. Möller, 4 förel. i kemi; lektor S. Svedberg, Förel. i geografi med särskild hänsyn till laborativ arbetsmetod (4 t.).

Stockholm: adjunkt O. Eneroth, Några huvudpunkter i geometriundervisningen (2 t.); lektor T. Wetterblad, Till vågrörelselärans metodik (2 t.); lektor G. Starck, Demonstration av valda kemiska försök (2 t.); adjunkt E. Löwenhamn, Några praktiska råd för fysik- och kemiundervisningen (2 t.); adjunkt O. Moberg, Om kartprojektioner (2 t.).

Uppsala: adjunkt J. Palmgren, Om införande av de moderna åskådningarna inom reaktionsläran vid kemiundervisningen å gymnasiet (4 t.).

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift. Utgiven av Svenska Kemistsamfundet, vars medlemmar erhålla tidskriftens 12 häften mot erläggande av årsavgiften till Samfundet, kr. 12: —.

Ur innehållet i årg. XLII, 1930. N:r 3 (mars): H. Lundegårdh, Den kvantitativa spektralanalysen som allmän analytisk metod. — N:r 4 (april): H. von Euler, Stockholms Högskolas Biokemiska institut. — N:r 6 (juni): F. Thorén, Katalasverkan hos platina. — N:r 8 (aug.): A. Westgren, Samband mellan kristallbyggnad och atomegenskaper hos övergångselementens metalliska föreningar. — I de flesta numren Meddelande från Sveriges Kemiska Industrikontor.

Populär astronomisk tidskrift. Utgiven av Svenska Astronomiska Sällskapet. Årg. 11, 1930, dubbelh. 1—2, 3—4. Per år genom bokhandeln kr. 16: —, genom posten kr. 15: —; tidskr. kan även erhållas genom medlemskap i sällskapet (årsavg. kr. 15: —); adress Box 745, Stockholm.

Ur innehållet. N. V. E. Nordenmark, Om Zeiss' planetarium och stellarium. — C. Schalén, Om mörk materia i världsrymden. — K. G. Malmquist, De statistiska undersökningarna rörande stjärnsystemets byggnad. — K. Lundmark, Den nya planeten. — E. A. Kreiken, Statistiska betraktelser ang. dubbelstjärnor. — H. Nordström, Om kalciummolnen i Vintergatan. — K. Lundmark, Vintergatans närmaste grannar.

Industritidningen Norden. Årg. 1930, h. 19—33. Med varje n:r följer som bilaga »Svensk tidskr. för industriellt rättskydd». Utkommer varje helgfri onsd.; per år kr. 12: —.

Ur innehållet. Civilbefolkningens skyddande mot gasanfall. — Självreglerande oljeeldningsapp. — Metallers uttröttning. — Den kemiska energien vid muskelarbetet. — Upptagning och återgivning av telefonsamtal. — Rönnskärs kopparverk. — Andrée och uppfinnareföreningen. — Hesselman-motorn. — Elektrisk svetsning. — Syrefast emalj. — Permalloy *C*, en ny magnetisk legering. — Ur Ingenjörsvetenskapsakademiens årsberättelse. — Det moderna glidlagret. — Ett europeiskt storkraftnät. — Arbetarskyddsmaterial. — Medd. om verksamheten vid Metallografiska institutet och ang. Tekniska muséet. — In memoriam: Gustaf Ekman, Joh. Rosengren.

Era. Elektricitetens rationella användning. Årg. 1930, h. 5—12. Per år kr. 5: —.

Ur innehållet. Den nya installationsmaterielen. — De korta radiovågornas segertåg. — Ljudfilmen, problem o. metoder. — Beskr. av elektrisk golvbonare. — Elektrisk kyrkouppvärmning. — Elektrisk svetsning. — Mineraloljan inom elektrotekniken. — En stor mängd elektrotekniska nyheter, varav många äro av stort intresse.

Radioamatören. Årg. 1930, h. 6—12. Per år kr. 6: —.

Ur innehållet. Selektivitetens ökande. — Kraftdetektorer. — Radiopejling. — Mätning av växelspänningar med »mavometer». — Hur bedömer man ett torrbatteris kvalitet? — Katodstrålröret som voltmeter. — Stationsväljarearanordningar. — Detektorer och deras verkan. — Elektronrörets utvecklingsmöjligheter. — Nya apparattyper.

Radio och Grammofon. Årg. 1930, h. 8—20. Per år kr. 7: 50.

Ur innehållet. Musiken från matematisk synpunkt. — Hur rörkaraktäristiken göres synlig med Brauns rör. — Lågfrekvensförstärkning med skärmgallerrör. — Sändare och mottagare för ultrakorta vågor. — Hemmainspelning av grammofonskivor. — Kapa-

citetsmätning vid högfrekvens. — Televisionsproblemet. — Sveriges radioindustri. — Flera värdefulla meddelanden ang. utförda materialprövningar vid tidskriftens laboratorium.

Matematisk Tidsskrift. Udgivet af Matematisk Forening i København, Aarg. 1930, H. 2, 3 o. 4. Per år kr. 15: —; endast avd. A. kr. 8: —.

Ur innehållet i avd. A. H. Bohr, Matematikens ideale elementer. — V. Gamst, Konvekse, halvregulære Polyedre. — J. Jensen, Om den ordinære bue i rummet. — Opgaver, Litteraturanm. Ur avd. B. J. Favard, Sur les inégalités de Minkowski. — R. Norgil, Næsten-periodiske Funktioner. — J. F. Steffensen, Om sansynligheden for at Afkommet uddør.

Fysisk Tidsskrift. Udgivet af Selskabet for Naturlærens Udbredelse, København, Aarg. 28, 1930, H. 1—5. Per år kr. 12: —.

Ur innehållet. W. Kossel, Krystallernes Vækst. — E. H. Rasmussen, Fresnels og Lloyds Interferensforsøg. — E. Rasmussen, Det fysiske Grundlag for Radiumbehandlingen. — O. Klein, Atomteoriens nyeste Udvikling. — H. Petersen, Om Luftelektricitet og luftelektriske Maalinger. — A. W. Marke, En ny elektromagnetisk Enhed »en Ørsted». — Opgaver og Anmeldelser.

Norsk matematisk Tidsskrift. Organ for Norsk matematisk Forening. Årg. 12, 1930, h. 2—4. Abonnemang tegnes ved henvendelse till aktuar N. Sohlberg, Vettakollen pr Oslo. Innland kr. 5: —, udland kr. 6: — per år.

Ur innehållet. B. Bjerke, Pedagogikk og pendler. — O. P. Arvesen, Plastiske skygger. — I. Johansson, Icke-Euklideisk geometri fra projektiv standpunkt. — B. Bjerke, En anvendelse av Bayes' sats. — Anm. av utländsk matematisk litteratur. — Norska examensuppg.

Den høiere Skole. Organ for Filologenes og Realistenes Lansforening. Årg. 32, 1930, h. 1—20, 522 sid. Abonnemang (6 kr. per år) genom *Steenske Forlags Tidsskrifteksp.*, Kirkegt. 15, Oslo.

I årg. 1930 ha förekommit följ. artiklar av matematiskt-naturvetenskapligt innehåll: C. Gørbitz, Forsøk i kjemi. — O. Ingerbrigtsen, Tallregning i skolen. — E. Vollset, Litt av feillæren i fysikkundervisningen. — O. F. Olden, Nøiaktighetsgrad. — F. Karlsen, Tallregning i skolen. — G. Bergan, Drammens kommunale middelskoles nye fysiske elevlaboratorium. — C. Gørbitz, Nyere katalytiske eksperimenter i undervisningen. — B. Vale, J. Skjerdal, F. Karlsen, Uppsatser om en norsk studentuppg. från 1913 (en läsvärd diskussion).

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

413) *Eliminera x, y och z ur systemet*

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} &= a \\ \frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y} &= b \\ \left(\frac{x}{y}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right) &= c \end{aligned}\right\}$$

A. H. P.

414) *Den konvexa fyrhörningen $ABCD$ är omskriven kring en cirkel O. Visa, att*

$$\frac{\overline{OA}^2}{AD\,.\,AB}+\frac{\overline{OB}^2}{AB\,.\,BC}=1.$$

X.

415) *En likformigt föränderlig triangel glider med två av sina vinkelspetsar på en fast ellips. Sök orten för den tredje vinkelspetsen, om triangeln rör sig så, att sidorna ständigt förbliva parallella med var sin av tre givna riktningar.* *Iter.*

416) *Bestäm antalet punkter med heltalskoordinater på hyperbeln $x^2-2y^2=-1$ inom en cirkel kring origo med radien $r=1600$.* *Iter.*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.[2]

417) Två trianglar ABC och $A_1B_1C_1$ äro så beskaffade, att $B=B_1$ och $A+A_1=180°$. Visa, att $BC\,.\,B_1C_1=AC\,.\,A_1C_1+AB\,.\,A_1B_1$.

418) Genom en fix punkt på diametern OA genom origo O drages en korda MN i cirkeln $x^2+y^2=2rx$. OM och ON skära linjen $x=2r$ i P och Q. Visa, att $AP\,.\,AQ$ är konstant. Kan uppgiften generaliseras?

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 419 och 420 äro insända av X; uppg. 421—427 av lektor R. Lundblad, Luleå.

419) Uppdela 64 343 i primfaktorer.

420) I cirkelsektorn AOB är centrivinkeln O spetsig. Cirkelbågarna APO och BPO tangera resp. OB och OA i O. Visa, att området PO är mindre än området ABP.

Ledn.: Som uttryck för skillnaden mellan ytorna erhålles $2\cos^2 v(\operatorname{tg} v - v)$, om $\sphericalangle AOB = v$ radianer och cirklarna APO och BPO antagas ha radien 1.

421) Parabeln $y = x^2$ är given.

a) Sök en punkt på y-axeln, så beskaffad, att de båda tangenter, vilka därifrån dragas, med varandra bilda 45° vinkel.

b) Är det möjligt att finna en punkt på linjen $y = x$, från vilken parabeln synes under rät vinkel?

c) Vilken är den minsta vinkel, under vilken parabeln synes från räta linjen $y = x - 2$?

Svar: a) $y = -1{,}457$. b) Ja, punkten $(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4})$. c) 36°,01.

422) Kurvan $y = x^3$ är given.

a) Tangenten till kurvan i en godtycklig punkt P drages, och tangenten utdrages, tills den skär kurvan i en punkt P'. Visa, att förhållandet mellan abskissorna för punkterna P' och P är konstant.

b) Från en godtycklig punkt på kurvan dragas de båda tangenter till kurvan, som kunna dragas. Visa, att vinkeln mellan dem aldrig kan vara 45°.

c) Vilken är den största vinkel dessa tangenter kunna bilda med varandra?

Svar: c) 36°,87.

423) Sök ekvationen för den gemensamma normalen till parabeln $y = \sqrt{x}$ och cirkeln $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 9$.

Svar: $2x + y - 3 = 0$.

424) Sök avståndet mellan de tangenter till kurvan $y = x^7$, som hava vinkelkoefficienten 7.

Svar: $1{,}2\sqrt{2}$ längdenheter.

425) För vilka punkter i xy-planet är funktionen $f(x, y) = \log(y - x^2)$ negativ?

Svar: För den del av planet, som begränsas av parablerna $y = x^2$ och $y = x^2 + 1$.

426) Från en godtycklig punkt P på räta linjen $y = 2x$ fälles en perpendikel PQ mot x-axeln. En cirkel med radien 2 längdenheter lägges så, att den går genom punkterna P och Q och har sin medelpunkt till höger om dessa. Sök orten för medelpunkten och konstruera den grafiskt eller på annat sätt.

Svar: En båge av ellipsen $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$.

427) Diskutera kurvan

$$y = \cos \frac{2\pi}{x^2 + 1}.$$

Lösningar till uppg. 373—376.

373) *Visa, att* $299 - 18\sqrt{6} + 44\sqrt{3} - 156\sqrt{2}$ *är en jämn kvadrat.* *A. N. Zahl.*

Uttrycket sättes $= (x + y\sqrt{2} + z\sqrt{3} + u\sqrt{6})^2$, där x, y, z och u skola vara positiva eller negativa hela tal. Efter utveckling av kvadraten fås ekvationssystemet:

$$\left.\begin{array}{lll} (1) & x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6u^2 = & 299 \\ (2) & xy + 3zu = & -78 \\ (3) & xz + 2yu = & 22 \\ (4) & xu + yz = & -9 \end{array}\right\}$$

Enligt (2) är antingen x eller y delbart med 3. Men om y är delbart med 3, blir vänstra membrum i (1) antingen $\equiv 0$ eller 1 (mod 3), vilket är orimligt. Således är x och enligt (4) även z delbart med 3.

Av (3) och (2) ses, att antingen både x och u eller både z och y äro jämna tal, enär både x och z ej kunna vara det på grund av (4), ej heller både x och y. Vore emellertid x och u jämna, men z och y udda, bleve vänstra membrum i (1) av formen $4n + 1$, vilket är orimligt. Således äro z och y jämna.

Då $z = 0$ ej ger någon lösning, måste z på grund av (1) vara $= \pm 6$, enär $|z| < 10$. Vidare är av liknande skäl $x = \pm 3$ eller ± 9. Vi få då ur (1)

$$(5)\ y^2 + 3u^2 = 91 \text{ eller } (6)\ y^2 + 3u^2 = 55.$$

Prövning med udda u-värden ger ingen lösning till (6) men till (5) lösningarna $y = \pm 8$; $u = \pm 3$ samt $y = \pm 4$; $u = \pm 5$. I förra fallet blir i (4) termen $yz = \pm 48$ men termen $xu = \pm 9$, vilket blir orimligt. I senare fallet blir $yz = \pm 24$; $xu = \pm 15$, vilket kan användas. Då *ett* tecken är likgiltigt, taga vi $x = +3$; då blir $u = +5$; $z = -6$ och $y = +4$. Uttrycket är alltså kvadraten på $\pm(3 + 4\sqrt{2} - 6\sqrt{3} + 5\sqrt{6})$. *B—r.*

374) *Av de fyra skärningspunkterna mellan två parabler med vinkelräta axlar sammanfalla tre i A, den fjärde är B. Visa a) att AB går genom axlarnas skärningspunkt och där delas i förhållandet 1 : 3; b) att A är mittpunkten till det stycke av kurvornas gemensamma tangent i A, som ligger mellan axlarna.* *X.*

Tagas parabelaxlarna till koordinataxlar, bli parablernas ekvationer:

$$y^2 = 2p(x + a);\ x^2 = -2q(y - b).$$

Elimineras här x, fås fjärdegradsekvationen

$$y^4 - 4apy^2 + 8p^2qy + 4a^2p^2 - 8bp^2q = 0.$$

Skall denna ha tre rötter $= k$, blir den fjärde roten på grund av koefficienternas beskaffenhet $= -3k$; vidare $4ap = 6k^2$; $8p^2q = 8k^3$ och $4a^2p^2 - 8bp^2q = -3k^4$. Härur får man:

$$a = \frac{3k^2}{2p};\ q = \frac{k^3}{p^2} \text{ och } b = \frac{3k}{2}.$$

Tre skärningspunkter sammanfalla i punkten $A\left(-\frac{k^2}{p};\ k\right)$; den fjärde ligger i $B\left(\frac{3k^2}{p};\ -3k\right)$.

Härav synes omedelbart, att linien AB går genom origo, d. v. s. genom parabelaxlarnas skärningspunkt, och där delas i förhållandet 1 : 3, samt att den gemensamma tangenten

$$y - k = \frac{p}{k}\left(x + \frac{k^2}{p}\right)$$

på axlarna avskär styckena $-\frac{2k^2}{p}$ och $2k$, d. v. s. att A ligger mitt emellan dess skärningspunkter med axlarna. *B—r.*

375) *I tetraedern D(ABC) är* $\angle ADB = \angle ADC = 90°$, $\angle BDC = v$. *Alla tre kantvinklarna vid kanterna i planet ABC äro lika* $(= \alpha)$. *Sök sambandet mellan* α *och* v. *X.*

Sidoplanen, som råkas i D, tangera samma rotationskon med spetsen i D och axeln längs höjden mot ABC. Spåret av denna kon i planet ABC är den i $\triangle ABC$ inskrivna cirkeln, som tangerar BC i dess mittpunkt, M, och AB t. ex. i N. Då är

$$tg\alpha = \frac{DA}{DM} = \frac{DA}{DN} = \frac{DB}{BN} = \frac{DB}{BM} = \frac{1}{\sin\frac{v}{2}}.$$

X.

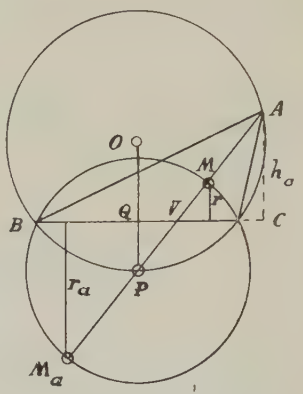
376) *Att upprita en triangel, då man känner en av höjderna och de om- och inskrivna cirklarnas radier.* *Iter.*

M och M_a ligga harmoniskt i förh. till A och V, emedan CA och CV ligga harmoniskt i förh. till CM och CM_a. Härav följer

$$\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} \qquad (1),$$

en relation, som också kan erhållas ur kända formler.

Då r och h_a äro kända, kan r_a konstrueras ur (1). Sedan fås $PQ = \frac{r_a - r}{2}$, där P och Q äro mittpunker på resp. bågen och kordan BC. Då omskrivna cirkelns radie är känd, framgår konstruktionen omedelbart.



Möjlighetsvillkor:

$$r_a > r$$

och $$\frac{r_a - r}{2} + h_a \leqq 2R$$

eller efter införande av värdet på r_a enl. (1)

$$(h_a - r)^2 \leqq 2R(h_a - 2r).$$

X.

Resultat av pristävlan.

I tidskriftens marshäfte 1930 inbjödos eleverna vid de högre allmänna läroverken till en pristävlan, som bestod i att så fullständigt och vackert som möjligt lösa sex *fysikaliskt-matematiska* uppgifter.

Efter granskning av de inkomna tävlingsskrifterna ha utgivarna beslutat utdela följande pris.

Första priset, en precisionsbarometer, »System Paulin» till ett värde av 100 kr., tilldelas Lennart Ekendahl, student vid Karolinska läroverket i Örebro v. t. 1930.

Andra priset, böcker till ett värde av femtio kronor, delas lika mellan Nils Sjöberg och Yngve Sjögren, båda studenter vid Göteborgs högre reallläroverk v. t. 1930.

Tredje priset utdelas ej.

Extrapris för vackra lösningar tilldelas: Carl Olov Gabrielsson, student vid Djursholms samskola v. t. 1930, Nils Westgren, student vid Falu högre allm. lärov. v. t. 1930, Nils Svartholm, elev i andra (nu i tredje) ringen vid Göteborgs högre latinlärov. och Jørgen Prytz Johansen, Ordrups Gymnasium, København. Extraprisen utgöras av Tidskr. för elem. matem. etc., årg. 1931.

Såsom väntat var, har uppgiften n:r 2 utgjort en stötesten. Endast förste pristagaren har löst denna uppgift fullt rätt. Till tjänst för dem, som löst uppgifterna felaktigt eller ej gått i land med dem, meddelas här resultaten med lösningar.

1. Två mycket små kulor, vilkas massor förhålla sig som 3 : 2, äro förenade med ett snöre. Snöret med kulorna hänges tvärs över en rät, cirkulär cylinder, vars axel är vågrät och vars radie är lika med snörets längd. Vilket läge intaga kulorna, när deras sammanlagda potentiella energi är störst?

Cylinderns radie sättes = 1, massorna = 2 och 3, vinklarna, som cylinderradierna till resp. kulor göra med lodlinjen = x och $(1 - x)$ radianer samt lägesenergien i förhållande till horisontalplanet genom centrum = y.

Då fås
$$y = 2\cos x + 3\cos(1-x)$$
$$y' = -2\sin x + 3\sin(1-x)$$
$$y'' = -2\cos x - 3\cos(1-x).$$

Sätt $y' = 0$, så fås efter vartannat

$$2\sin x = 3\sin(1-x); \qquad (1)$$

$$\frac{\sin x}{\sin(1-x)} = \frac{3}{2}; \qquad \frac{\sin x + \sin(1-x)}{\sin x - \sin(1-x)} = 5;$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}}{\operatorname{tg}\left(x-\frac{1}{2}\right)} = 5; \qquad \operatorname{tg}\left(x-\tfrac{1}{2}\right) = 0{,}2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2};$$

$$x - \tfrac{1}{2} = 6°{,}24; \qquad x = 34°{,}89.$$

Att detta x-värde gör y'' negativ, inses omedelbart.

Ekv. (1) kan även erhållas på följande sätt.[1] Den potentiella energien är störst, när systemet är i jämvikt. Upplösa vi de på massorna verkande gravitationskrafterna i komposanter utefter radien och tangenten, erhålles omedelbart enl. momentlagen

$$2\sin x = 3\sin(1-x).$$

Vi kunna ock resonnera sålunda.[2] Energien är störst, när systemets tyngdpunkt ligger på lodlinjen genom centrum. Då kropparnas avstånd från denna lodlinje äro $\sin x$ och $\sin(1-x)$, fås omedelbart ekv. (1).

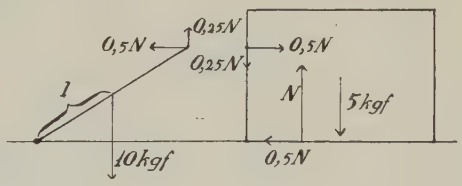
Svar: Cylinderradierna till kulorna göra med lodlinjen vinklarna 34°,89 och 22°,41.

2. I ett golv finnes en lucka, som är rörlig kring två gångjärn i ena långsidan. Bredvid luckan står en låda av parallellipipedisk

[1] Denna syn på uppgiften ha endast hrr EKENDAHL och JOHANSEN haft.
[2] Idéen upptagen av hr JOHANSEN.

form. En av dess kanter är parallell med luckans långsida, och dess höjd är så stor, att när luckan öppnas och lutas baköver, luckan med sin andra längskant kommer att luta mot en av lådans vertikala väggar. Det kan då inträffa, att lådan på grund av luckans tyngd skjutes undan. Alltefter luckans lutning mot golvet kan friktionen mellan lådan och luckan vara fullt utbildad eller ej, när denna glidning börjar. Finnes det någon lutningsvinkel, för vilken friktionen på båda ställena just är fullt utbildad? Luckans vikt är 10 kg, lådans 5 kg, friktionskoefficienten 0,5 såväl mellan lådan och golvet som mellan lådan och luckan.

Vi beteckna lådans tryck mot golvet med N. Friktionen mellan lådan och golvet blir då 0,5 N. Utom denna finnes endast en kraft i horisontell led, nämligen luckans tryck mot lådan. Detta tryck måste alltså också bli 0,5 N. Friktionen mellan luckan och lådan blir 0,25 N. I vidstående fig. visas resp. luckan och lådan med de krafter, som äro verksamma. Om den sökta lutningsvinkeln sättes $= \alpha$ och luckans bredd $= 2\,l$ fås

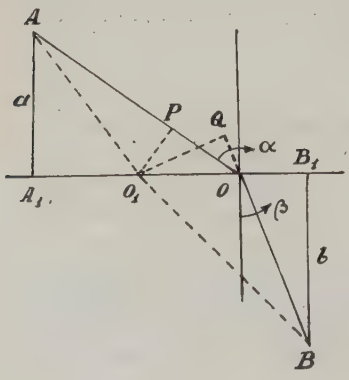


$$\left.\begin{aligned} N &= 0{,}25\,N + 5 \\ 10l\cos\alpha &= 0{,}5\,N\,.\,2l\sin\alpha + 0{,}25\,N\,.\,2l\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

varav $N = \frac{20}{3}$ och $\alpha = 45°$.

Svar: Lutningsvinkeln är 45°. (Lösningen efter Ekendahl).

3. Ett strävt horisontellt plan är genom en rät linje delad i två områden med olika friktionskoefficient, respektive c_1 och c_2. Man vill släpa en kropp från en punkt i det förra området till en punkt i det senare och därvid välja vägen så, att det erforderliga arbetet blir så litet som möjligt. Vilken väg skall man taga?



Antag, att kroppen, vars tyngd sättes $= 1$, skall föras från A till B över O. Projektionerna av A och B på gränslinjen äro A_1 och B_1 resp. Sätt $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$, $A_1O = x$, så blir arbetet y

$$y = c_1\sqrt{a^2 + x^2} + c_2\,.\,\sqrt{b^2 + (c - x)^2}$$

och

$$y' = \frac{c_1 x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c_2 (c - x)}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = c_1 \sin A_1 AO - c_2 \sin B_1 BO.$$

Sätt $y' = 0$, så fås

$$c_1 \sin A_1 AO = c_2 \sin B_1 BO$$

eller

$$c_1 \sin \alpha = c_2 \sin \beta. \qquad (1)$$

Växer α, så minskar β, varför $y' > 0$.

Avtar α, så ökar β, varför $y' < 0$, vilket visar, att y når sitt minimum, när (1) gäller. (Denna lösning efter hrr GABRIELSON och WESTGREN).

Följande bevis för att (1) motsvarar ett minimum, är kanske av intresse. Vi jämföra storheterna $c_1 . AO + c_2 . OB$ och $c_1 . AO_1 + + c_2 . O_1 B$ med varandra och fälla därför normaler $O_1 P$ mot AO och $O_1 Q$ mot BO. Ur fig. fås

$$PO = OO_1 \sin \alpha; \qquad QO = OO_1 \sin \beta,$$

varav

$$\frac{PO}{QO} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_2}{c_1}$$

eller

$$c_1 . PO = c_2 . QO.$$

Arbetet $c_1 . AO + c_2 . OB$ kan nu skrivas $= c_1 . AP + c_1 . PO + + c_2 . OB = c_1 . AP + c_2 . (QO + OB) = c_1 . AP + c_2 . QB < c_1 . AO_1 + + c_2 . O_1 B$, varmed satsen är bevisad.

Svar: För vägriktningarna gäller den från ljusets brytning välkända sinuslagen. Brytningsexponenterna — eller ljushastigheternas inverterade värden — utbytas endast mot friktionskoeff. Uppgiften behandlas ju formellt på samma sätt som den kända satsen (FERMATS princip), att ljuset går från A till B på minimitid.

4. I en konisk pendel, bestående av en liten kula, som är upphängd i en viktslös, otänjbar tråd, bildar tråden 45 ° vinkel med lodlinjen. På grund av friktionen förlorar pendeln långsamt energi, och utslagsvinkeln minskas, tills kulan slutligen stannar lodrätt under upphängningspunkten. Den har då avgivit ett visst energibelopp till omgivningen. Huru stor är utslagsvinkeln, när pendeln avgivit *halva* det nyssnämnda energibeloppet, om pendelkulan även då kan anses beskriva en cirkel?

Sätt den sökta vinkeln $= \alpha$, trådens längd $= l$, jordacc. $= g$, kulans massa $= m$ (∴ tyngden $= mg$), centrifugalkraften $= C$, E_α = pendelns energi — rörelseenergi jämte potentiell energi i förh. till lägsta punkten — vid en utslagsvinkel $= \alpha$ och en hastighet $= v$. Då är

$$E_\alpha = \frac{mv^2}{2} + mg \,.\, l(1 - \cos\alpha).$$

Men $$C = \frac{mv^2}{l \sin\alpha} \text{ och } \operatorname{tg}\alpha = \frac{C}{mg}, \text{ varför}$$

$$\frac{mv^2}{2} = C \,.\, \frac{l \sin\alpha}{2} = \frac{mgl \operatorname{tg}\alpha \,.\, \sin\alpha}{2} \text{ och alltså}$$

$$E_\alpha = mgl\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha \,.\, \sin\alpha}{2} + 1 - \cos\alpha\right).$$

Villkoret $E_\alpha = \frac{1}{2} \cdot E_{45°}$, ger efter hyfsning ekv.

$$\sin\alpha \,.\, \operatorname{tg}\alpha - 2\cos\alpha + a = 0, \quad \text{där } a = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad \text{varur}$$

$$\cos\alpha = \frac{a \underset{(-)}{\pm} \sqrt{a^2 + 12}}{6} = \cos 32°{,}28.$$

Svar: Den sökta vinkeln är 32°,28. (Lösningen angiven av EKENDAHL).

5. Ett kärl i form av en rak cylinder med en inre genomskärningsyta av 100,5 cm² är delvis fyllt med kvicksilver och placerad med sin axel vertikal. Från en punkt nära kärlets botten leder ett vertikalt rör — yttre genomskärningsyta 0,5 cm² — upp genom en urborrning i det tätt slutande locket. Röret är utanför kärlet ombockat och dess andra ända försedd med en kran, vars fina öppning befinner sig 20 cm under kvicksilverytan i kärlet. Den så bildade häverten är helt fylld med kvicksilver ända till den stängda kranen. Den i kärlet, ovan kvicksilvret instängda luften har vid ett tryck, som är 75 cm och lika med det yttre lufttrycket en volym av 0,5 liter. Hur stor volym kvicksilver rinner ut ur kärlet, då kranen öppnas? Temperaturen är hela tiden densamma.

Om kvicksilverytan i cylindern antages sjunka x cm och den instängda luftens tryck minskas från 75 cm till p cm, erhålles ur Boyles lag och principen för häverten omedelbart

$$\left.\begin{aligned} 75 \,.\, 500 &= p \,.\, 100\,(5 + x) \\ 75 &= p + (20 - x) \end{aligned}\right\},$$

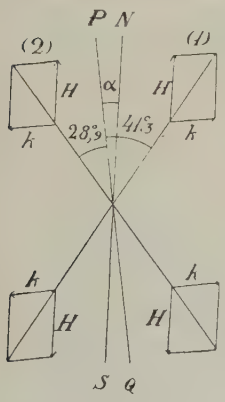
varur

$$x = -30 \underset{(-)}{\pm} \sqrt{1000} = 1{,}6228.$$

Svar: 162,3 cm³ kvicksilver rinner ut.

6. En tangentbussol står på ett horisontellt bord men är ej injusterad i det magnetiska meridianplanet. Den visar ett utslag på 41°,3, när en viss ström passerar bussolen i den ena riktningen, men ett utslag på 28°,9, när strömmen omkastats. Huru stort bleve utslaget, om bussolen vore rätt injusterad?

Låt PQ vara tangentbussolens spolplan, som med den magnetiska meridianen NS bildar vinkeln α. Med H och k betecknas den jordmagnetiska (horisontella) resp. elektromagnetiska kraften på magnetnålen. Om utslagsvinklarna 41°,3 och 28°,9 gå åt motsatta håll på bussolens skala, erhålles vidstående figur. Skulle utslagen gå åt samma håll vid båda strömriktningarna — vilket fall i praktiken bör vara uteslutet — räknas sistnämnda vinkel negativ. Observerar man, att krafterna $k \perp PQ$, erhålles omedelbart för lägena (1) och (2) resp. ekv.



$$\frac{H}{k} = \frac{\sin(90° - 41°,3)}{\sin(41°,3 - \alpha)} \quad \text{och} \quad \frac{H}{k} = \frac{\sin(90° \mp 28°,9)}{\sin(\alpha \pm 28°,9)},$$

där de övre tecknen gälla samtidigt. Härav

$$\frac{\cos 41°,3}{\sin(41°,3 - \alpha)} = \frac{\cos 28°,9}{\sin(\alpha \pm 28°,9)}.$$

Ekv. löses genom utveckling enl. formeln

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \,.\, \sin B.$$

Divideras sedan båda leden med $\cos 41°,3 \,.\, \cos 28°,9 \,.\, \cos \alpha$, så fås

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} 41°,3 \mp \operatorname{tg} 28°,9}{2} \quad \text{och}$$

$$\alpha_1 = 9°,27; \quad \alpha_2 = 35°,57.$$

Om utslaget, då bussolen är rätt inställd, kallas x, erhålles

$$\frac{H}{k} = \cot x = \frac{\cos 41°,3}{\sin(41°,3 - \alpha)}.$$

Insättas α-värdena, fås $x_1 = 35°,22$; $x_2 = 7°,57$.

Svar: Utslaget blir 35°,2 [eller 7°,57].

Anm. Lösningen i huvudsak efter N. Svartholm. Man torde observera, att medeltalet mellan 41°,3 och 28°,9 är 35°,1, vilket endast med $^1/_3$ % skiljer sig från det ovan beräknade.

Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna H. T. 1930.

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. Huru mycket skall man vid början av vart och ett av 10 på varandra följande år insätta i en sparbank, för att det så uppkomna slutkapitalet skall lämna en årlig ränteavkastning på 400 kronor? Räntefoten antages vara 3,5 %.
2. I en triangel ABC äro sidornas längder: $BC = 13$ cm, $CA = 14$ cm och $AB = 15$ cm. En cirkel, vars medelpunkt ligger på sidan BC, tangerar de två övriga sidorna. Beräkna denna cirkels radie.
3. En rät cirkulär kon är omskriven kring en sfär, vars diameter är lika med konens halva höjd. Bevisa, att konens hela yta är dubbelt så stor som sfärens yta.
4. I en liksidig triangel inskrives en annan liksidig triangel så, att den får ett hörn på var och en av den ursprungliga triangelns sidor. I vilket förhållande skola den inskrivna triangelns hörn dela den ursprungliga triangelns sidor, för att förhållandet mellan de båda trianglarnas ytor skall bliva 1 : 2?
5. Två kordor i en cirkel skära varandra så, att skärningspunkten delar den ena kordan i tvenne delar med längderna 3 dm och 8 dm, under det att den andra kordans ena del blir 4 dm. Den vinkel mellan de båda kordorna, som inneslutes av sträckorna 3 dm och 4 dm, är 60°. Beräkna cirkelns radie.
6. En aritmetisk serie består av 30 termer. Summan av alla termer är 25. Man betraktar dels summan av alla termer med udda ordningsnummer, dels summan av alla termer med jämna ordningsnummer. Produkten av dessa båda summor är 156. Bestäm serien.
7. Bestäm maximi- och minimipunkterna samt asymptoterna till kurvan

$$y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}.$$

Upprita kurvan i stora drag.

8. Visa, att om n är ett helt tal, så kan talet $3n+2$ aldrig vara kvadraten på ett helt tal.

Resultat: **1.** 974,2 kr. **2.** $5\frac{2}{2}\frac{3}{9} = 5{,}793$ cm. **4.** $(2+\sqrt{3}):1$. **5.** $\frac{\sqrt{273}}{3} = 5{,}508$ dm. **6.** $-\frac{2}{15}, -\frac{1}{15}, 0, \ldots, \frac{25}{15}, \frac{26}{15}, \frac{27}{15}$ eller omvänt. **7.** Asymptoter: $x=1$ och $y=x+1$; $y_{max}=-2$ för $x=-1$ och $y_{min}=6$ för $x=3$. **8.** Vore kvadratroten $=3k$, så vore $9k^2=3n+2$, d. v. s. $3k^2-n=\frac{2}{3}$, som är orimligt. Vore kvadratroten $=3k\pm1$, så hade man $9k^2+1\pm6k=3n+2$, d. v. s. $3k^2\pm2k-n=\frac{1}{3}$, som även är orimligt.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

1. Följande aritmetiska serier äro givna:

   2, 6, 10, ..., och
   85, 83, 81, ...

   Man vill taga ett antal termer i vardera serien från början räknat, i båda serierna tillsammans 30 termer, så att summan av dessa 30 termer blir så liten som möjligt. Hur många termer skola då tagas från vardera serien?
2. I en triangel ABC är vinkeln A dubbelt så stor som vinkeln B. Bestäm den mot vinkeln A stående sidan som funktion av triangelns båda övriga sidor.
3. En pyramid är given. Pyramiden skäres av ett med basytan parallellt plan. Snittytan väljes till bottenyta i en annan pyramid, vars topp ligger i den ursprungliga pyramidens basyta. Hur skall planet läggas, för att den nya pyramiden skall få så stor volym som möjligt, och hur stor blir denna, uttryckt i den ursprungliga pyramidens volym?
4. Brännpunkten till en parabel $y^2=2px$ sammanfaller med ena brännpunkten till en ellips $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Vinkeln mellan kurvornas båda gemensamma tangenter är 60°. Beräkna ellipsens excentricitet.
5. Lös ekvationen

$$\sin\left(\frac{2}{3}x-45°\right)+\cos\left(\frac{3}{2}x+45°\right)=0.$$

6. Två kordor i en cirkel skära varandra i en punkt inom cirkeln under en vinkel av 60° så, att den ena kordans delar bliva 3 och 8 cm och den andra kordans delar 4 och 6 cm. Beräkna cirkelns radie.

7. Med r betecknas en rot till ekvationen

$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

Visa, att $2 - r^2$ också är en rot till ekvationen, och bestäm ekvationens tredje rot, uttryckt i r.

8. I ett rätvinkligt koordinatsystem XOY har man tagit punkten P med koordinaterna $x = a$, $y = a$. Genom P lägges en rät linje l, som råkar x-axeln i A, y-axeln i B. Tangenterna i O och A till den kring triangeln OAB omskrivna cirkeln råkas i Q. Sök ekvationen för orten för Q, då l vrider sig kring P.
9. Att i en given cirkel inskriva en fyrhörning, då en av fyrhörningens vinklar och vinkeln mellan diagonalerna äro lika med var sin av två givna vinklar, och vidare fyrhörningens yta är lika med ytan av en given kvadrat.

Resultat: **1.** 13 termer från den förra serien, 17 termer från den senare. **2.** $a = \sqrt{b(b+c)}$. **3.** På ett avstånd från toppen $= \frac{2}{3}$ av pyramidens höjd. Den nya pyramidens volym $= \frac{4}{27}$ av den ursprungligas. **4.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **5.** $x = n \cdot 432°$; $x = \frac{6}{13}(270° + n \cdot 360°)$. **6.** $\frac{1}{3}\sqrt{273} = 5{,}508$ cm eller $\sqrt{37} = 6{,}083$ cm. **7.** Den tredje roten $= r^2 - r - 2$; kan även erhållas under formen $\frac{1}{r(r^2-2)}$. **8.** Parabeln $2x^2 - ax + ay = 0$.

Uppgifter i fysik.

1. En rät cirkulär cylinder, vars höjd är dubbelt så stor som basdiametern, består av två olika träslag, sammanlimmade i ett med basytan parallellt snitt, som delar höjden mitt itu. Cylindern ställes på ett strävt lutande plan, vars lutningsvinkel så småningom ökas. Då denna är 32°,0, vippar cylindern över. Sök förhållandet mellan de båda träslagens specifika vikter.
2. En liten kula är medelst ett viktlöst snöre förenad med en fast punkt och roterar kring denna i en vertikal, cirkulär bana. När kulan befinner sig i banans översta punkt, är hastigheten så stor, att snöret nätt och jämt är spänt. Sök förhållandet mellan kulans tyngd och spänningen i snöret, då kulan befinner sig i banans nedersta punkt.
3. Ett kopparstycke, som vägde 5 g och hade en temperatur av 17° C, nedsänktes i flytande syre, vars temperatur var —183° C, d. v. s. syrets kokpunkt. Därvid bildades en viss mängd syrgas, som uppmättes och visade sig vid en temperatur av

15° C och ett tryck av 72 cm kvicksilver intaga en volym av 1220 cm^3. Beräkna härav det flytande syrets ångbildningsvärme. Spec. värmet för koppar är 0,08. Vid en temperatur av 0° C och ett tryck av 76 cm kvicksilver intaga 32 g syrgas en volym av 22,4 liter. Syrgasens utvidgningskoefficient är $^1/_{273}$.

4. Ett lysande föremål befinner sig på 300 cm avstånd från en vertikalt ställd skärm. En positiv lins kan förflyttas mellan skärmen och föremålet, så att den optiska huvudaxeln alltid sammanfaller med normalen från föremålet mot skärmen. I två olika lägen hos linsen uppstår därvid på skärmen en tydlig bild av föremålet. Avståndet mellan dessa båda lägen är 180 cm. Beräkna linsens fokaldistans.
5. I en plan skärm är anbragt ett cirkulärt hål med 2 cm radie. Hålet täckes av en tunn, positiv lins, vars optiska huvudaxel går genom hålets medelpunkt och är vinkelrät mot skärmen. Linsens brännvidd är 20 cm. En planparallell 3 cm tjock glasskiva är uppställd parallellt med skärmen med sin närmaste yta på ett avstånd av 5 cm från skärmen och linsen. Linsen träffas av med den optiska huvudaxeln parallella, homogena ljusstrålar, som brytas av linsen och därefter passera genom glasskivan. Bestäm radien hos den ljusa cirkel, som alstras på glasskivans från linsen vända sida. Glasets brytningsexponent är $^3/_2$.
6. En person ville bestämma ett motstånd R, men hade till sitt förfogande inga andra mätinstrument än två voltmetrar A och B. Av dessa hade A ett motstånd av 2000 ohm och B ett motstånd av 1000 ohm. Han inkopplade i en strömbana voltmetern A parallellt med motståndet R och införde därefter voltmetern B i den ogrenade strömbanan. A visade då 12 volt och B 11 volt. Beräkna motståndet R.
7. Ett konstant batteri, vars elektromotoriska kraft är 10 volt och inre motstånd 2 ohm, slutes genom en yttre ledning, som består av två i serie kopplade motstånd. Det ena av dessa är 1 ohm. Det andra motståndet avpassas så, att den i detsamma alstrade effekten är den största möjliga. Hur stor är då denna effekt?
8. Redogör för någon metod att bestämma ett ämnes brytningsexponent.

Resultat: **1.** 2,33. **2.** 1 : 6. **3.** 51,1. **4.** 48 cm. **5.** 1,3 cm. **6.** 2400 Ω. **7.** $8\frac{1}{3}$ *W*.

Realskolexamen H. T. 1930.

Provräkning.

1. Förenkla så långt som möjligt

$$\left(\frac{3x+2y}{4}-2y\right):\left(1\frac{5}{6}x-\frac{5y+3x}{3}\right).$$

2. A köper en post aktier i ett industribolag för 1350 kr pr styck. Nominella värdet är 1000 kr pr aktie. Huru många procents ränta får han på sitt i dessa aktier nedlagda kapital ett år, då bolagets utdelning är 9 %?
3. En bilfirma har åsatt en bil ett pris av 8200 kr. Hur många procents rabatt erhåller en köpare, vilken som betalning lämnar dels en 3 månaders växel å 6000 kr, som omedelbart diskonteras efter 6 %, dels ett kontant belopp av 1880 kr?
4. Vid en eldsvåda på landet användes en brandspruta, vars behållare rymde 10 hl. Sedan behållaren blivit fylld med vatten, sattes sprutan i gång. Fyra minuter senare började man ösa vatten i behållaren medelst tre hinkar, rymmande resp. 5, 7 och 9 liter. Den minsta hinken tömdes 8, den största 4 och 7-litershinken 6 gånger i minuten. Då sprutan varit i gång oavbrutet i 25 minuter, var dess behållare tom. Huru mycket vatten utkastade sprutan i minuten?
5. En kvadrat $ABCD$ och en liksidig triangel ABO äro uppritade på samma sida AB och åt samma håll. AO och BO förlängas, tills de råka CD i F och E. Beräkna sträckan FE, om AB är 2 dm.
6. Två cirklar med medelpunkterna A och B ha vardera en radie av 5 cm. Avståndet AB är 12 cm. Parallellt med AB drages en gemensam tangent till cirklarna. Beräkna radien i den cirkel, som tangerar såväl cirklarna som denna tangent.
7. I ett koniskt kärl är öppningens diameter 10 cm och sidan 13 cm. Man slår vatten i kärlet, så att detsamma når 3 cm från kärlets rand (utefter sidan räknat). Hur mycket vatten finnes då i kärlet? ($\pi = 3{,}14$.)
8. En cylindrisk glasburk, vars yttre diameter är 10,0 cm och höjd 14,0 cm, väger 516 g. Beräkna burkens inre rymd, om glasets sp. v. är 2,40. ($\pi = \frac{22}{7}$.)

Resultat: **1.** 0,9. **2.** $6\frac{2}{3}$ %. **3.** 5 %. **4.** 139 [139,12] l. **5.** $\frac{1}{8}\sqrt{48} - 2 = 0{,}309$ dm. **6.** 1,8 cm. **7.** $14\underline{3}$ cm³. **8.** 885 cm³.

Sannolikhetsräkning på empirisk grundval.

Av EDVARD GÖRANSSON.

4. Frekvenskurvor.

Man brukar åskådliggöra en statistisk serie genom uppritande av en följd rektanglar, ett s. k. histogram,[1] på det sätt jag närmare angivit i anslutning till fig. 1 i en uppsats förra året i tidskriftens junihäfte (årg. XIII, 1930, s. 199). Denna figur är självfallet idealiserad. I allmänhet ligga somliga rektanglar helt inom, andra överskjuta den utjämnande kurvan. Att konstruera kurvan efter ögonmått, s. k. grafisk utjämning, är så tillvida en bristfällig metod, att två personer aldrig komma till exakt samma resultat, om de oberoende av varandra verkställa en utjämning. Man använder därför hellre en metod, som gör utjämningsförfarandet i möjligaste mån oberoende av den subjektiva uppfattningen hos den, som utför arbetet.

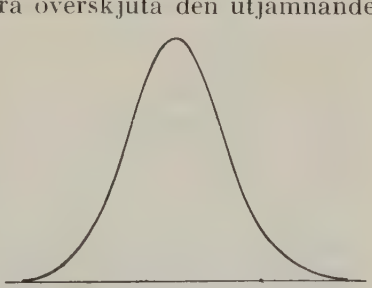


Fig. 5. En symmetrisk frekvenskurva.

Om man har att göra med normal fördelning, så sker utjämningen genom det i min uppsats i marshäftet (årg. 14: 1, 1931, s. 19) i formeln (9) upptagna uttrycket

$$y = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

[1] Av grekiska ἱστος = mast.

Anmärkningsvärt är, att om fördelningen är normal, endast två parametrar m och σ erfordas, av vilka m är medelvärdet och σ spridningen kring mediet. Som exempel på en utjämnad normal frekvenskurva, återgives i fig. 5 en bild av längden av vuxna män [1] i England och Wales. Abskissan anger längden och ordinatan motsvarande antal. Lämpligt statistiskt material av denna art torde finnas i de allmänna läroverkens arkiv. Under åren 1893—1915 har nämligen på grund av en kungl. kungörelse den 16 december 1893, som medförde ändring i 1878 års läroverksstadga, utförts mätning och vägning av de allmänna läroverkens lärjungar. Vid en del läroverk torde ännu dylika undersökningar utföras av skolläkarna. När det gäller längden av ett stort antal gossar av samma ålder, har man att motse normal fördelning. När det gäller kroppsvikten hos personer av en viss ålder, brukar fördelningen däremot vara sned. För att få tillräckligt stort material kan man taga tillsammans uppgifter från flera år eller från flera läroverk. För övrigt hänvisas till ett arbete i statistikens teori av professor Wicksell med exempel hämtade från befolkningsstatistiken.[2]

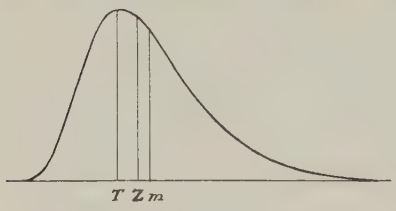


Fig. 6. En måttligt asymmetrisk frekvenskurva.

En utjämnad, lindrigt asymmetrisk fördelningskurva återgives i fig. 6, hämtad från nyss anförda arbete av Yule. Kurvan återger sambandet mellan procenten understödstagare (abskissan) och antalet fattigvårdsdistrikt (ordinatan). När man har att göra med asymmetriska frekvenskurvor, har man, utöver de förut omnämnda begreppen, medelvärdet m och dispersionen σ, infört följande storheter: den statistiska *medianen* Z och *typen* T (se fig. 6).

[1] G. Udny Yule, An introduction to the Theory of Statistics, 2:a uppl. London. Griffin, 1912.

[2] S. D. Wicksell, Elementen av statistikens teori, Stockholm, Svenska Försäkringsföreningen 1920.

Medianen kallas också det *sannolika* värdet, därför att antalet observationer, som överskjuta detta värde, är lika med antalet av dem, som understiga detsamma. Medianen motsvarar sannolika felet inom felteorien och är abskissan för den punkt, vars ordinata delar mitt itu den figur, som begränsas av kurvan och x-axeln.

Med *typen* menas det värde, omkring vilket observationerna hopa sig tätast, d. v. s. abskissan för maximipunkten. Detta värde benämnes även det sannolikaste värdet, eftersom det är det värde, som man kan vänta med största sannolikhet. Är typen större än medelvärdet, visar kurvan *positiv snedhet,* är den mindre *negativ snedhet.*

Professor Wicksell framhåller i det nyss anförda arbetet, att begreppet *median* är av gagn i sådana fall, då kvantitativa mått icke kunna fastställas men väl en viss rangordning kan angivas mellan individer inom olika grupper. Som exempel anför professor Wicksell följande. Antag att en matematiklärare vill jämföra två parallellavdelningar med varandra. Inom vardera klassen kan han ordna lärjungarna i följd efter stigande kunskaper, men kvantitativt kan han ej så lätt mäta en elevs kunskapsmått. Något medelvärde för vardera avdelningen kan han ej beräkna. Medianen kan han dock på visst sätt angiva genom att inom vardera avdelningen bestämma den elev, som har lika många bättre över sig som sämre under sig. En jämförelse mellan de två »medianeleverna» ger då en jämförelse mellan genomsnittsnivån i de olika avdelningarna.

I många fall kan man uppskatta medianen och typen samt på det sättet erhålla en bättre översikt över förhållandena än det, som framgår ur medelvärdet enbart. Ett exempel härpå må anföras. I Skolöverstyrelsens berättelse över det högre skolväsendet läsåret 1927—1928 återfinnes å sid. 109* en tabell över betygen i studentskrivningarna. Från denna tabell meddelas här ett brottstycke. Medianen är bestämd medelst lineär interpolation. Om förloppet vore kontinuerligt, hade alltså vid de högre allmänna läroverken en

realist att räkna med att i alla ämnen utom i fysik komma upp till B eller Ba. I sistnämnda ämne kunde han under den gjorda förutsättningen ej räkna med ett högre betyg än något över BC. Vid de enskilda läroverken skulle han i detta ämne sannolikt ej ens nå upp till BC.

Realisternas skriftliga prövning i studentexamen år 1928 vid högre allmänna läroverk.

Vitsord	Examinandernas fördelning efter erhållna vitsord i				
	modersmålet	tyska	engelska	matematik	fysik
C = 0	18	35	39	80	226
BC = 0·5	—	—	—	—	—
B = 1	331	227	253	281	302
Ba = 1·5	256	204	246	191	130
AB = 2	175	223	211	170	101
a = 2·5	57	133	83	86	57
A = 3	10	20	13	32	21
Summa	847	842	845	840	837
m	1·46	1·63	1·53	1·45	1·08
Z	1·15	1·39	1·27	1·15	0·64
T	B	B	B	B	B

Begreppet *snedhet* infördes av Karl Pearson år 1895 och definierades så, att $s = (Z—T) : \sigma$, där s är snedheten, Z medianen, T typen och σ dispersionen. Vid normal fördelning är tydligen $Z = T = m$ och alltså $s = 0$. Numera definieras emellertid snedhet på annat sätt, som i det följande skall närmare angivas.

Ofta erhåller man noggrannare uttryck för frekvensfunktionen genom en serieutveckling, innehållande utom funktionen dennas derivator multiplicerade med vissa koefficienter.

Inom statistiken rör man sig med uttryck av formen

$$\nu_p = \frac{\Sigma (x_i - m)^p}{n}$$

där p är ett helt tal i allmänhet $\leqq 4$. Av dessa storheter, som sägas vara moment kring mediet av ordningen p, ha vi redan angivit, att kvadratroten ur momentet av andra ordningen utgör medelkvadratiska avvikelsen eller spridningen kring mediet. De högre momenten ν_3 och ν_4 karaktärisera variationens form, d. v. s. dess asymmetri m. m. Storheterna ν_p benämnas även *den statistiska seriens aritmetiska karakteristikor.*

Professor Charlier, som inlagt stora förtjänster om utjämningsförfarandet genom att införa vissa typer av serieutvecklingar, definierar *snedheten* s och *excessen* E genom uttrycken

$$s = -\frac{\nu_3}{2\sigma^3}, \quad E = \frac{\nu_4}{8\sigma^4} - 0{,}375$$

samt använder serieutvecklingen

$$(14) \quad y = \varphi(x) + \frac{1}{3} s\sigma^3 \varphi^{III}(x) + \frac{1}{3} E\,\sigma^4 \varphi^{IV}(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} s\right)^2 \sigma^6 \varphi^{VI}(x).$$

I detta uttryck har man att införa den normerande variabeln enligt (9), d. v. s. ersätta $\varphi(x)$ med $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

I allmänhet äro s och E små storheter, varför man vid någorlunda normal frekvens endast behöver använda första termen i utvecklingen. I övrigt beror antalet termer, som behöva medtagas, av omständigheterna. Anmärkningsvärt är, att den normala fördelningsfunktionen ej sällan kan användas även på sådana fall, då de enkla schematiska förutsättningar, ur vilka den härletts, icke äro uppfyllda. Om man i serieutvecklingen (14) nöjer sig med att använda tredje och fjärde derivatorna, erhåller man formeln

$$(15) \quad y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \left\{1 - \frac{1}{3} s\left[\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^3 - 3\,\frac{x-m}{\sigma}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3} E\left[\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^4 - 6\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2 + 3\right]\right\}.$$

Till belysning av det föregående anföres ett exempel. Den begränsade ramen för denna framställning har ej medgivit undersökning av medelfelen i beräknade storheter.

Åldersfördelning av ordinarie småskollärarinnor i medeltal från slutet av vårterminen 1923 till och med vårterminen 1927.[1] Den ordinarie småskolekåren omfattade 12 509 lärarinnor vid slutet av vårterminen 1928. Adderar man antalet, som haft ordinarie anställning vid slutet av vårterminen vart och ett av de 5 år, varom här är fråga, d. v. s. vårterminerna 1923—1927, kommer man enligt följande tabell till 63 404, vilket utvisar, att kåren är i avtagande ($5 \times 12\,509 = 62\,545$).

Ordinarie småskollärarinnor vid slutet av vårterminerna 1923—1927.

Ålder	Antal personer under ettårig observation	Ålder	Antal personer under ettårig observation	Ålder	Antal personer under ettårig observation	Ålder	Antal personer under ettårig observation
18	1	30	2 235	43	1 604	55	939
19	4	31	2 264	44	1 559	56	861
		32	2 325			57	809
20	29	33	2 315	45	1 523	58	771
21	247	34	2 310	46	1 508	59	731
22	704			47	1 439		
23	1 293	35	2 294	48	1 371	60	668
24	1 732	36	2 270	49	1 273	61	236
		37	2 211			62	139
25	1 965	38	2 172	50	1 199	63	89
26	2 045	39	2 087	51	1 110	64	65
27	2 107			52	1 074		
28	2 156	40	1 939	53	1 031	65	30
29	2 189	41	1 808	54	985	66	1
		42	1 687			*18—66*	*63 404*

Av tabellen, som innehåller en fördelning av lärarinnorna efter åldern, beräknas medelåldern $m = 38.4$. Vidare finner man, att summan av personer tillhörande årsklasserna 18—36 är 30 485, men att summan av årsklasserna 18—37 är

[1] Statens offentliga utredningar 1931: 4. Ecklesiastikdepartementet.

32 196. Halva antalet observationsår är 31 702. Man kan alltså sätta medianen $Z = 36{,}5$ år. Slutligen finner man, att typen $T = 32$ år. Den kurva, som anger åldersfördelningen, utvisar alltså en negativ snedhet ($T < m$).

Redan den anförda tabellen angiver, att småskollärarinnorna, vilkas pensionsålder är 60 år och medelålder vid examens avläggande 22,2 år, förete en egendomlig åldersfördelning. Avgångsfrekvensen är ock exceptionell. Den går ned från ett maximum i den praktiskt sett yngsta årsklassen till ett minimum vid 43 år, för att därefter växa till pensionsåldern. Avgångsfrekvensen utgjorde för respektive åldrar

20	30	40	50	59 år
103.4	38.9	10.3	14.2	91.7 ‰

och åskådliggöres genom fig. 7.

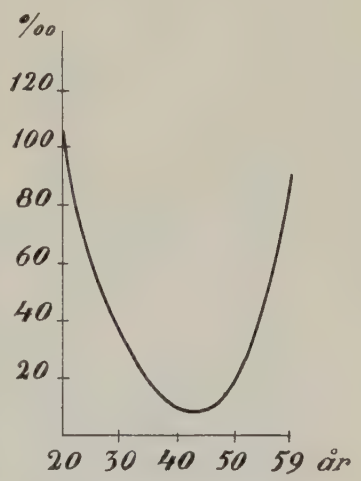


Fig. 7. Avgångsfrekvensen bland småskollärarinnor åren 1923/1928.

Den anförda ålderstabellen omfattar 49 årsklasser och räkneschemat kommer med hänsyn till att kurvan är sned att omfatta ett avsevärt antal kolumner för beräkning av alla storheter, som erfordras för tillämpning av formeln (15). I det följande upptages endast början av detta schema. För att reducera räknearbetet — här är endast fråga att ge läsaren en föreställning om utjämningsförfarandet — och då man i alla händelser kan nöja sig med approximativa beräkningar, hava årsklasserna sammanförts i vissa grupper. Den metod jag här använt avviker emellertid något från den man vanligen följer.[1]

[1] Wicksell, loc cit. sid. 20 ff.

Räkneschema.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Åldersgrupp	Antal personer under ettårig observation	Medelålder inom gruppen x	$x - m$	Procentisk fördelning av i kol. 2 upptagna p_x	$p_x (x - m)^2$	$\frac{x - m}{\sigma}$	$\varphi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$	Antal årsklasser i gruppen ω_x	$100 \frac{\omega_x}{\sigma} \varphi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$
18/24	4 010	23·1	— 15·3	6·3	1 474·8	— 1·52	0·1258	6	7·518
25/29	10 462	27·1	11·3	16·5	2 106·9	— 1·13	0·2108	5	10·500
30/34	11 449	32·0	— 6·4	18·1	741·4	— 0·64	0·3248	5	16·180
35/39	11 034	37·0	— 1·4	17·4	34·1	— 0·14	0·3946	5	19·655
40/44	8 597	41·9	+ 3·5	13·6	166·6	+ 0·35	0·3749	5	18·675
45/49	7 114	46·9	+ 8·5	11·2	809·2	+ 0·85	0·2779	5	13·840
50/54	5 399	51·9	+ 13·5	8·5	1 549·1	+ 1·34	0·1627	5	8·105
55/59	4 111	56·9	+ 18·5	6·5	2 224·6	+ 1·84	0·0736	5	3·655
60/66	1 228	61·0	+ 22·6	1·9	970·4	+ 2·25	0·0319	6	1·908
18/66	*63 404*	*38·4*	—	*100·0*	*10 077·1*	—	—		*100·036*

$m = 38{\cdot}4$.

Då i vardera av grupperna 18/24 och 60/66 en årsklass endast räknar *en* person, hava dessa åldersgrupper antagits omfatta endast *sex* årsklasser vardera.

Av räkneschemat (kol. 1, 2 och 9) framgår, hur årsklasserna sammanfogats i grupper. Gruppernas storlek framgår av kol. 2. Vidare har medelåldern för varje grupp beräknats. Denna betecknas med x. Den s. k. klassbredden eller avståndet mellan två på varandra följande x-värden är alltså något varierande men ligger i medeltal nära 5 år.

Jag antager alltså approximativt, att i en viss grupp, vars medlemsantal är g_x, åldern för var och en av de i gruppen ingående årsklasserna (i allmänhet 5) är densamma och lika med medelåldern x inom gruppen. Om antalet medlemmar av de olika årsklasserna inom gruppen är l_x, l_{x+1}, $\ldots\ l_{x+4}$, så blir för gruppen i dess helhet $l_x(x-m)^p + l_{x+1}(x-m)^p + \ldots + l_{x+4}(x-m)^p = g_x(x-m)^p$. I stället för att behöva räkna med 49 årsklasser kommer man genom detta approximativa förfaringssätt undan med 9 grupper.

För att slippa att räkna med de stora talen i kol. 2, har jag räknat med motsvarande procenttal p_x. Talen $l_x + l_{x+1} + \ldots + l_{x+4} = g_x$ bli alltså i alla formler ersatta med $\frac{p_x}{100}$ (se kol. 5). En tabell över sannolikhetsfunktion $\varphi(x)$ bifogas, för att möjliggöra beräkningen av talen $\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ i kol. 8.

Den normala sannolikhetsfunktionen $\varphi(x)$.

$\pm x$	$\varphi(x)$	$\pm x$	$\varphi(x)$	$\pm x$	$\varphi(x)$	$+x$	$\varphi(x)$
0·0	0·3989	1·0	0·2420	2·0	0·0540	3·0	0·0044
0·1	0·3970	1·1	0·2179	2·1	0·0440	3·1	0·0033
0·2	0·3910	1·2	0·1942	2·2	0·0355	3·2	0·0024
0·3	0·3814	1·3	0·1714	2·3	0·0283	3·3	0·0016
0·4	0·3683	1·4	0·1497	2·4	0·0224	3·4	0·0012
0·5	0·3521	1·5	0·1295	2·5	0·0175	3·5	0·0009
0·6	0·3332	1·6	0·1109	2·6	0·0136	3·6	0·0006
0·7	0·3123	1·7	0·0940	2·7	0·0104	3·7	0·0004
0·8	0·2897	1·8	0·0790	2·8	0·0079	3·8	0·0003
0·9	0·2661	1·9	0·0656	2·9	0·0060	3·9	0·0002

Av det anförda schemat över räkningarna framgår (se kol. 6), att $\nu_2 = \frac{10077.1}{100} = 100.771$, varav $\sigma = \sqrt{\nu_2} = 10.038$. Beräkning av övriga karakteristikor samt snedheten s och excessen E hava utelämnats av utrymmesskäl. Man finner

$$\nu_2 = 100.771, \qquad \sigma = \sqrt{\nu_2} = 10.038$$

$$\nu_3 = 402.978, \qquad s = -\frac{\nu_3}{2\sigma^3} = -0.1992$$

$$\nu_4 = 22\,445.654, \qquad E = \frac{\nu_4}{8\sigma^4} - 0.375 = -0.0987.$$

Såsom framgår av kol. 10 i räkneschemat motsvara skaldelarna utefter y-axeln dem, som ligga till grund för talen i kol. 8, multiplicerade med $\frac{\omega_x}{\sigma}$, då ω_x är antalet årsklasser inom åldersgruppen (klassbredden).

I följande tabell äro sammanställda dels de observerade värdena, dels de utjämnade värden y_1, vilka framgå av kol. 10 i räkneschemat, dels de värden y_2, som erhållas om tredje derivatan, dels ock de värden y_3, som man får, om även fjärde derivatan medräknas. Då de värden, som erhållits

Åldersfördelning av småskollärarinnor i genomsnitt redovisningsåren 1923—1928.

Åldersgrupp	Medelålder x	Observerade värden %	Utjämnade värden %		
			y_1	y_2	y_3
18/24	23.1	6.3	7.5	8.0	9.4
25/29	27.1	16.5	10.5	11.8	12.9
30/34	32.0	18.1	16.2	18.0	17.6
35/39	37.0	17.4	19.6	21.5	19.6
40/44	41.9	13.6	18.7	18.6	17.2
45/49	46.9	11.2	13.8	12.1	12.4
50/54	51.9	8.5	8.1	7.2	8.4
55/59	56.9	6.5	3.7	3.8	4.5
60/66	61.0	1.9	1.9	1.3	1.4
18/66	*38.4*	*100.0*	*100.0*	*102.3*	*103.4*

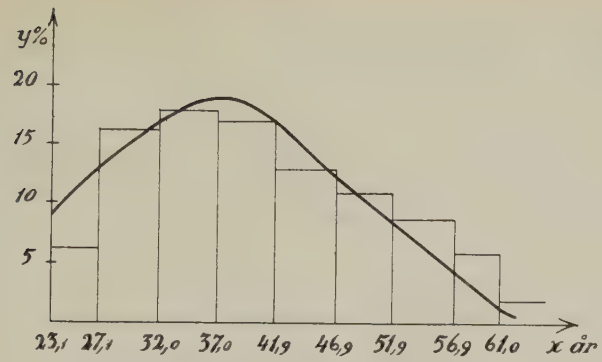


Fig. 8. Åldersfördelning av småskollärarinnor åren 1923/1928.

genom medtagande av 4:de derivatan synas vara bäst, hava de upptagits i fig. 8, som jämväl återger ett på förut antytt sätt uppritat histogram.

Det torde böra omnämnas, att det resultat, vartill man kommer genom klassindelning, kan korrigeras genom de s. k. sheppardska korrektionsformlerna. Ehuru detta ej skett, är utjämningen, såsom figuren utvisar, ganska tillfredsställande. Uppgiften är hämtad från ett aktuellt problem och ej utvald med tanke på att ernå en vacker utjämning. Ofta kommer man till bättre resultat genom att på lämpligt sätt modifiera parametern σ. Om snedheten är avsevärt skild från 0, kan man stundom med fördel använda logaritmisk fördelning,[1] varvid antages att *log* x är normalt fördelad. I detta fall är frekvenskurvan

$$y = \frac{1}{\sigma_1 x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(lgx - m_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

I den första av dessa uppsatser (årg. XIII: 4, 1930, sid. 197) är omnämnt, att man brukar inordna frekvenskurvorna i vissa typer. De, som låta utjämna sig genom formeln (14),

[1] Wicksell loc. cit. sid. 67 ff. och Cramér loc. cit. sid. 146.

se fig. 5, 6 och 8, kallas A-kurvor. En kurva med det utseende, som fig. 7 anger, kallas U-kurva. Exempel på en extremt asymmetrisk kurva, s. k. J-kurva, erbjuder antalet underkända i fysikskrivningarna till studentexamen åren 1923—1928 vid de allmänna läroverken.[1] Kurvan antydes genom histogrammet fig. 9. Procenten underkända åren 1923—1928 utgjorde resp.

2.7, 5.1, 4.8, 6.6, 17.5 och 27.0.

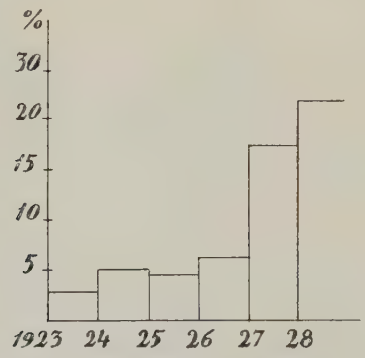


Fig. 9. Underkända i fysikskrivningarna till studentexamen åren 1923 – 1928.

[1] Sid. 111* i Skolöverstyrelsens ovan citerade berättelse.

Sannolikhetsräkning och allmänbildning.

Av HENRIK PETRINI.

»Jaså, det är inte alldeles säkert, ja, då kan det ju lika gärna vara tvärtom!» Dessa ord gåvo mig en stark känsla av att herrar humanister behöva studera något litet sannolikhetskalkyl för att lära sig tänka. För deras primitiva uppfattning är sannolikheten tydligen alltid $= {}^1/_2$, om den inte är $= 1$ eller $= 0$. Men det kan kvitta, om man känner till dylika matematiska petitesser, tycker nog mången, ty probabilitetskalkylen har ju ingen praktisk betydelse annat än möjligen för spelare, och detta måste gälla i ännu högre grad för vetenskapen, vars speciella uppgift ju är att vara *exakt*, vilket utesluter allt tal om det blott sannolika. Ja, tilllägger man kanske, sannolikhetskalkylen själv kan naturligtvis inte bygga annat än på lösan sand, då man där rent av förutsätter, att man *inte* har någon exakt kunskap om de föremål man behandlar, och då kan man ju ej heller komma till några exakta resultat; m. a. o. sannolikhetsräkningen har minst av allt att göra anspråk på att vara en vetenskap.

Den mentalitet, som ger sig tillkänna på detta sätt, saknar till skillnad från den empiriskt naturvetenskapliga det befruktande inflytandet av den direkta beröringen med den yttre naturen. Kunskapens relativitet är en genom den empiriska forskningen sent vunnen insikt, som endast obetydligt hunnit göra insteg i humaniora, där man ännu laborerar med absoluta kunskaper. Sålunda få där även de mest godtyckliga grammatiska regler värdet av något absolut bindande, även om språkbruket ej är fullt stadgat, och de former, som strida mot reglerna, räknas som »felaktiga».

Men får en grammatiker se en svart katt och en, som är

grå, så säger han inte, att den ena är »oriktig»; då passa inte längre hans vetenskapliga kategorier, vilka ytterst torde vara hämtade från matematiken, det gamla idealet för all vetenskap. I samma mån som de empiriska vetenskaperna gjort sig gällande, har deras formella hjälpvetenskap måst utbilda särskilda metoder för att kunna användas på det nya innehållet. Då de empiriska vetenskaperna måste nöja sig med approximativa bestämningar, så kunde matematiken frångå sin ursprungliga fordran på slutna exakta lösningar av problemen, och matematikens utveckling tog en ny riktning, i det man studerade approximativa lösningar i form av konvergenta och halvkonvergenta serier, där approximationen kunde drivas hur långt som hälst eller blott till en viss grad.

Emellertid utvigades fältet för den exakta vetenskapliga forskningen, både intensivt, särskilt genom molekylarteorien, och extensivt därigenom att allt flera områden för det mänskliga forskningsarbetet började behandlas med exakta vetenskapliga metoder. Därvid visade det sig, att de matematiska serieutvecklingarna för approximativ beräkning av exakt definierade kvantiteter i och för sig inte enbart räckte till för att bringa reda i det nya innehållet, utan man måste se sig om efter andra matematiska metoder.

En sådan fann redan Clausius, då han sökte efter en matematisk teori för gaslagarna under antagandet av molekylarhypotesen, i det han drog fram den gamla, för hasardspelet uppfunna sannolikhetskalkylen och använde den som ett hjälpmedel i den matematiska fysiken. Denna metod utvecklades av Maxwell och Boltzman till en viss grad av fulländning, men det är först under de senaste fyra åren, som sannolikhetskalkylen har fått den fundamentala betydelse för fysik och kemi, att man knappast kan förstå ett modernt arbete i dessa ämnen utan en rätt ingående kännedom om denna gren av matematiken.

Men även de mera beskrivande naturvetenskaperna ha visat sig behöva använda sannolikhetskalkylens formler och

kurvor för sina forskningar, så att en botanist eller zoolog, som totalt saknar insikter i sannolikhetskalkyl, riskerar att få stå som ett levande frågetecken inför en elementär lärobok i hans eget huvudämne.

Men humanisterna behöva väl ändå ingen sannolikhetskalkyl? Låt oss se efter! *Filosofien,* som förr knappast var annat än ett ordrytteri, som framträdde med stora later, har alltmer övergått till att bliva en empirisk, på fysiologien grundad vetenskap, i den mån den lämnar de värdelösa, metafysiska spekulationerna och koncentrerar sig på den empiriska psykologien (FECHNER, WUNDT). Men där kommer den i beröring med den moderna biologiens metoder och teorier, vilka, som ovan nämnts, använda sannolikhetskalkylens resultat. Och vad logiken beträffar, är den gamla Aristoteliska logiken av föga värde både som vetenskap och för allmänbildningen. Den senare är däremot mera betjänad av någon insikt i hur man *skaffar* sig kunskaper, och därvid stöter man på den ofullständiga induktionen, som är ett slags sannolikhetsbevis. För övrigt måste logiken, om den vill ge sig ut för att studera det mänskliga tänkandet, akta sig för att negligera det matematiska tänkandet och dess användning i den empiriska forskningen.

Statistiken har ursprungligen räknats till humaniora, men den bygger numera så helt på sannolikhetskalkylen, att den snarare bör betraktas som tillämpad matematik.

Nationalekonomien bygger helt och hållet på statistiken, utan vilken den endast blir ett slags filosoferande i det blå utan fast mark under fötterna.

Historien har väl ännu inte höjt sig över krönikestadiet, så länge som den är exakt, och vad den ger sig ut på därutöver kan väl närmast karakteriseras som utsvävningar i vältalighet. Men även detta efterblivna ämne skall väl förr eller senare följa de andra humanistiska ämnenas exempel och upptaga vetenskapliga metoder, och då måste den historiska vetenskapen stödja sig på nationalekonomien och därmed på statistiken. Dessutom har den att ansluta sig till

rena naturvetenskaper, sådana som arkeologi, etnografi och geografi. På dessa senare stöder sig även

Religionsforskningen, som jämte *språkforskningen* inte kan undvara konjekturer, vilka förutsätta någon träning i sannolikhetsberäkningar, om de inte skola bli alltför subjektiva och godtyckliga.

Juridiken kommer i intim beröring med psykologi och statistik, varjämte den är beroende av lagstiftningen, som numera alltid vilar på statistiska utredningar. Förr i världen voro juristerna också de enda uppsalastudenterna, som hade sannolikhetskalkyl i examen.

På alla områden av den vetenskapliga forskningen i våra dagar fordras sålunda en mer eller mindre ingående bekantskap med sannolikhetskalkylens principer och viktigaste resultat, så att en viss kännedom härom måste betraktas som en nödvändig beståndsdel i den högre allmänbildning, som studentexamen avser att garantera.

Men sannolikhetsbegreppet och räkning med sannolikheter har en mycket vidsträcktare användning, i det slumpen ej blott spelar in på alla områden av det mänskliga livet, utan rent av kan betraktas som en huvudfaktor i hela den organiska utvecklingen. Är det nu så, att man knappast kan klart fatta någonting alls i naturens liv utan att märka en inverkan av slumpen; ja, då måste någon kännedom om slumpens lagar vara av utomordentlig betydelse för varje människas allmänbildning, även den lägre, som svarar mot realexamen.

Ett begrepp, som spelar en oerhörd roll i det praktiska livet, är *förväntningen* och dess korrelat, *risken.* Den allmänna bristen på medveten uppfattning härav har för mången varit orsak till förlusten av en chans här i livet. Hur många gånger har man inte hört ungdomar säga: »det lönar sig inte, att jag söker platsen, jag får den nog inte ändå». Någon utsikt har han ju, men vad riskerar han genom att lägga in en ansökan? Det är detta övervägande av utsikt och risk, som alltför ofta saknas, vilket hämmar

företagsamheten i stort som i smått. Några enkla räkneexempel på den matematiska förväntningen torde vara tillräckliga för att fästa uppmärksamheten på denna snart sagt hela livet igenom dominerande fråga, och detta kan och bör göras redan i nederskolan.

I det praktiska livet räknar man sällan med absoluta värden, utan man gör nästan alltid sina beräkningar med sannolikheter. Det bör därför betraktas som en svår försummelse av skolan, att den inte meddelat lärjungarna någon som helst undervisning, som avser att klargöra sannolikhetsbegreppet. Så mycket mer glädjande är det då, att det nu äntligen ryckts in i den nya kursplanen en bestämmelse, att den hithörande grenen av matematiken inte längre får försummas. Stadgandet, att några enklare exempel på sannolikhetskalkyl skola givas i tredje ringen, synes förutsätta som självfallet, att läraren dessförinnan av sig själv meddelat lärjungarna de första begreppen på området, men att det nu gäller att räkna exempel också. Denna uppfattning strider dock som bekant mot erfarenheten, utan torde man i stället böra tolka stadgandet så, att det nu är meningen att fylla den omnämnda luckan i allmänbildningen och ge eleverna en viss insikt i sannolikhetsbegreppet och dess tillämpningar såväl i det praktiska livet som i elementen av den vetenskapliga forskningen på olika områden. Endast för att illustrera de första grunderna böra några *ytterst* enkla räkneexempel givas, som regel ej svårare, än att de kunna räknas av en medelbegåvad lärjunge i (den gamla) tredje klassen.

Någon särskild drill för studentskrivningar på området bör inte förekomma; vi ha alldeles nog av den *absolut onyttiga drillen* i logaritmer i obekanta baser, trigonometriska ekvationer och Herons formel. Matematikens uppgift i skolan bör inte vara drill på formler, utan ett matematiskt skolat tänkande. I detta fall spela av läraren genomgångna lösningar till mer invecklade sannolikhetsproblem en viss roll, om huvudvikten lägges på *kritiken* av vissa till hands liggande och gärna historiskt givna, felaktiga (eller riktiga)

lösningar. Däremot bör man inte fordra, att lärjungarna själva, ej ens de medelbegåvade, skola kunna lösa svårare uppgifter, än att de gott skulle kunna ges i realexamen, om kursen i sannolikhetskalkyl hade förlagts till (den gamla) femte klassen.

Allt nytt, hur självklart det än är, möter alltid några motståndare. Jag minns t. ex., hur man vid läraremötet i Falun 1909 måste kämpa med näbbar och klor för att rädda differentialkalkylens plats i skolan mot oväntade angrepp från mest vederhäftigt håll, och lika mycken oförståelse hade mött mig några år förut, då jag först försökte övertala ledande fysiker att hjälpa mig att införa fysiska och kemiska laborationer i realskolan. Men finnes det väl nu någon, som vill avskaffa diagramritning och differentialkalkyl? Vill man inte hellre fortgå på den inslagna vägen och taga med — låt vara utom kursplanen — elementen av integralkalkylen? Men fastän alla äro ense om värdet av den halvmesyr, som dock blev vunnen i fråga om laborationer i realskolan, så väntar dock än i dag idéns fullständiga genomförande med laborationer från och med första klassen på sin lösning.

Och ändå förvånar det mig, att detta obetydliga tillägg till kursen i matematik, som några enklare exempel på sannolikhetsräkning innebära, skall stöta på ett så kompakt motstånd från matematiklärarnas sida, ja, att det överhuvud taget skulle stöta på något motstånd alls. Möjligen kan detta bero på den nuvarande läraregenerationens obekantskap med ämnet, som aldrig ingått i examensfordringarna vid universitetet annat än för »cum» i juridikofilen. På åttiotalet var dock intresset för sannolikhetskalkyl rätt livligt bland de yngre uppsalamatematikerna, som ofta diskuterade sådana ämnen på matematiska föreningen, och professor Daug fann sig t. o. m. föranlåten att hålla en extra kurs i ämnet för de särskilt intresserade. Även på 1890-talet hölls en liknande kurs, denna gång av observator Charlier.

För att undervisa i den lilla kurs, som nu inkommit på

skolprogrammet fordras dock inte djupare kunskaper, än att läraren lätt kan sätta sig in i vad som behövs utan någon större ansträngning, och behandlar han ämnet på ett förståndigt sätt, skall han finna, att det bereder en rik och angenäm omväxling med excercerandet med trigonometriens och den analytiska geometriens många torra formler.

Mig synes, att sannolikhetskalkylen inte bör behandlas som ett från den övriga matematikens olika grenar strängt avskilt kapitel, utan den bör i stället införas successivt och på de områden, där detta lämpligast kan ske. Redan i andra till fjärde klasserna [1] kan man bland alla hastighets- och arbetsproblem, där dessa ännu icke hunnit avskaffas, även ge lärjungarna några lättare kombinationsproblem. Vid diskuterandet av dessa kan man lämpligen omnämna någon omedelbar tillämpning på sannolikhetsberäkning. Senast i femte klassen kan man vid repetition av aritmetiken blanda in ett eller annat exempel på förväntning och risk och ge eleverna några vinkar om hur de böra använda dessa begrepp i det praktiska livet.

Redan i första ringen (av det 4-åriga gymnasiet) kan man lära eleverna, hur de skola bestämma π med två decimaler genom att släppa ned en knappnål på ett streckat papper, ett experiment, som lämpligen utföres i hemmet och diskuteras i skolan. I andra ringen kan man i samband med de fysiska laborationerna meddela något om felen, deras förekomst och storlek. För fysikens skull bör man i tredje ringen börja med differentialkalkylen redan på höstterminen, och ett lämpligt, enkelt skolskrivningsproblem blir då att »beräkna minimum av uttrycket $\sqrt{(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2}$. Generalisera!» En lämplig uppgift att förelägga lärjungarna i tredje ringen är att upprita (L III) och diskutera (R III) kurvan $y = 10^{-x^2}$. Slutligen bör i samband med läran om sammansatt ränta någon intresserad elev få hålla ett föredrag om grunderna för försäkringsväsendet.

[1] 5-årig realskola!

Sålunda äro lärjungarna något förberedda, när de skola taga itu med ett mer systematiskt studium av sannolikhetskalkylen, ett studium, som nästan endast behöver utgöra en sammanfattande översikt av vad de redan känna till. Först hänvisas till erfarenheten om den subjektiva sannolikheten, sådan den tar sig uttryck i *induktionen*. En mera matematisk form för induktionen ges nu lärjungen genom hänvisning till hans fysiska laborationer, där han bör ha haft tillfälle att genom tolkning av sina experiment själv härleda enkla fysiska lagar eller åtminstone upprita medelkurvor, som utvisa det sannolika sambandet mellan de fysiska storheterna. Vid sådana fenomen, där man kan förutsätta, att de exakta kurvorna skola ha ett jämnt förlopp, kan man nu genom induktionsslut använda de funna, sannolika kurvorna till interpolering och försiktig extrapolering.

Diskussionen av de rent tillfälliga felen leder omedelbart till behandlingen av sådana fall, där något samband icke kan upptäckas, utan där man helt och hållet räknar med slumpen. Man hänvisar då till statistiken, som på de mest skilda områden påvisar, att även slumpen följer bestämda lagar: hur än de enskilda elementen variera, så blir medeltalet av ett stort antal element i det närmaste konstant eller följer enkla lagar, såsom fallet är t. ex. med gaserna. Här kunna intresserade lärjungar lämpligen sticka in med föredrag över felteorier, statistik, livränteberäkningar o. d. Klassen i dess helhet får däremot repetera kombinationsläran och sannolikhetskalkylens element.

När man gjort detta, kan man komma in på själva kärnan i sannolikhetskalkylen något närmare, nämligen en mer matematiskt preciserad form av de stora talens lag. För latinlinjen torde det räcka med den synnerligen förtjänstfulla framställningen i lektor Hj. Olsons »Sannolikhetskalkylens första grunder», sid. 20, helst utökad med ett par kurvor: frekvenskurvan jämte statistiskt bestämda punkter 1:o ur ett fåtal fall, 2:o ur ett stort antal fall. Först därigenom fås en klar bild av innebörden av den underbara

lagbundenheten i slumpens verkan, när det är fråga om ett stort antal fall. Denna insikt i slumpens lagbundenhet är så mycket viktigare för den högre allmänbildningen, som den moderna teoretiska fysiken tenderar att bygga hela kausalitetsprincipen på denna lag. På reallinjen bör tillfälle beredas särskilt intresserade lärjungar att hålla föredrag med en mera analytisk behandling av de stora talens lag. Dessutom finnes gott om ämnen för längre och kortare föredrag om exempelvis biologiska och andra statistiska tillämpningar, lagar om sannolika fel, korrelation, minsta kvadratmetoden, teorien för aningar och sanndrömmar, när man tar hänsyn till de fall, som inte slå in, geometrisk sannolikhet, spel och lotteri, speciella, intressanta sannolikhetsproblem m. m.

Härvid böra lärjungarna lära sig att förstå och reproducera givna lösningar av värdefulla problem, men man får ej fordra, att de på egen hand skola kunna lösa ett enda problem utöver realskolans ståndpunkt, ty ämnet är för betydelsefullt för allmänbildningen för att tiden skall förslösas på onyttig drill. För att tydliggöra, vad jag menar härmed, vill jag angiva det, som i lektor Olsons lärobok bör läsas av alla och för dem vara tillräckligt: ex. 1—7 (ej 8), 9, 14, 16, *möjligen* sats 3, 21, sats. 4 (32—35 genomgås i nederskolan), 46, 48—51, tillsammans 14 övningsexempel — ett pensum, som man icke borde behöva tvista om.

Varför sjunga telefontrådarna?

Av **TORGNY EDQVIST.**

Det har visat sig vara mycket svårt att på ett fullt tillfredsställande sätt förklara det välbekanta tonandet hos telefontrådar och andra i fria luften utspända, långa metalltrådar. En del för detta ändamål framförda hypoteser äro ej annat än lösa och fantastiska gissningar och skola här förbigås. Till föremål för allvarlig granskning återstå knappast flera än följande sex möjligheter: nämligen att tonandet skulle vara en skakningseffekt, en elektromagnetisk effekt, en torsionseffekt, en temperatureffekt, en verkan av vindtrycket och slutligen en luftvirveleffekt.

Såsom skakningskälla har man tänkt sig periodiska rörelser i jordskorpan — eventuellt förorsakade av ändringar i lufttrycksfördelningen — vilka reflekterats upp till trådarnas fästpunkter. Hypotesen kan ej utan vidare avvisas, men, så långt jag känner till, föreligga ännu inga säkra fakta, som tala för den.

Enligt en bland allmänheten utbredd åsikt beror tonandet av de elektriska strömmarna i tråden. Strouhal[1] framhåller, att denna hypotes icke är alldeles ogrundad. Tråden befinner sig ju i det jordmagnetiska fältet och måste därför vid varierande strömstyrkor bli utsatt för ponderomotoriska krafter av växlande storlek och riktning. Men dels äro dessa krafter nästan alltid ytterst små, och dels skulle för en ordnad svängningsrörelse en synkronism erfordras mellan kraftens variationer och trådens egensvängningar, som endast undantagsvis kan äga bestånd under någon avsevärd tid.

Robitzsch [2] anser, med stöd av iakttagelser av antenntrådar på Spetsbergen, att trådens torsion är tonandets primära orsak. Torsionssvängningarna skulle på ett eller annat sätt utlösas genom vindens påverkan. Vidare skulle en temperatureffekt inträda genom temperaturens inverkan på trådens elasticitetsförhållanden. Strouhal medgiver, att torsionen kan vara av ett visst inflytande, men tillmäter icke torsionseffekten primär betydelse.

Den kände schweiziske meteorologen Gockel [3] anser, att tonandet är en ren temperatureffekt. »Das Tönen wird durch das mit der Temperaturveränderung verbundene Sich-Spannen und Entspannen der Drähte hervorgebracht.» Han hänvisar till att en »sjungande» ton erhålles, då man långsamt spänner en slak sträng på ett monokord. En på detta sätt uppkommen ton är emellertid mycket svag. Men trådar i fria luften tona ofta med en betydlig intensitet. Gockel förmodar, att stolparna kunna genom sina egensvängningar öka trådsvängningarnas amplitud. Schmauss [4] tror, att dels starka temperaturväxlingar och dels en vind av lämplig riktning och styrka utgöra förutsättningarna för ett kraftigt tonande. »Was wir hören ist gar nicht so sehr das Tönen der Drähte, als das durch ihr Tönen angeregte Mitschwingen der zwischen den Drähten hindurchstreichenden Luft.» Den i citatet återgivna uppfattningen kan dock ej upprätthållas, emedan Strouhal har visat, att dylika »lufttoner» också äga ringa intensitet. För min del finner jag på grund av egna och andras iakttagelser, att en temperatureffekt av den primära betydelse, som Gockel gör gällande, icke existerar.

Det direkta vindtrycket har mycket litet att betyda. Trådarna tona bäst vid lugnt väder, då vindtrycket alltså är ringa. Även sedan örat tränats att urskilja tonandet vid blåst, som alltid medför en mängd störande ljud, befinnes denna regel hålla streck. Om trådsvängningarna berodde på vindtrycket, borde de försiggå i ett plan, som vore parallellt med den mot tråden vinkelräta vindhastighetskompo-

nenten. I själva verket ske svängningarna vinkelrätt mot denna komponent, vilket lord RAYLEIGH[5] fann vara fallet hos eolsharpans strängar.

Trådarna kunna säkert under därför gynnsamma omständigheter alstra svängningar av hörbar frekvens enligt var och en av de här framställda hypoteserna, men icke ens sammanlagt giva dessa en tillräcklig förklaringsgrund för fenomenet. En, som det förefaller, tillförlitlig grund erbjuder i stället virvelhypotesen.

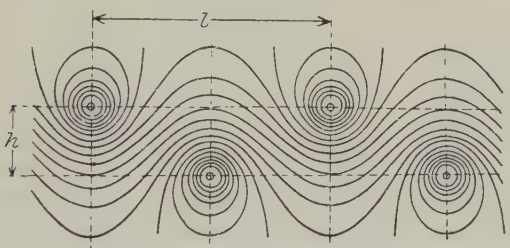
När en strömmande gas (eller vätska) träffar ett fast hinder, t. ex. en metalltråd eller en kilformig egg, bildas bakom den hindrande kroppen virvlar, emedan de partiklar, som befunnit sig närmast kroppens yta, tack vare friktionen röra sig långsammare än de längre bort belägna partiklarna. CARRIÈRE[6] har experimentellt påvisat dylika virvlar i luft. Han blåste genom en spalt tryckluft, innehållande vattenånga, mot den kilformiga läppen till en jättestor orgelpipa av 15 meters längd. På ömse sidor om läppen alstrades då virvlar. Dessa, som blivit synliga genom vattenångans kondensation vid expansionen, observerades stroboskopiskt vid intermittent belysning.

Fig. 1.

Fig. 1 visar utseendet av virvlar, hörande till nionde övertonen.[7] Denna sorts virvelrörelse i vätskor har noggrant studerats, experimentellt av PRANDTL[8] och teoretiskt av v. KÁRMÁN OCH RUBACH.[9] Den periodiska virvelavlösningen har sedan av F. KRÜGER m. fl.[10] med framgång använts till att förklara uppkomsten av olika slags »friktionstoner» (Hiebtöne, Schneidentöne, Spalttöne enl. tysk terminologi). Antag det enklaste fallet, att en lång, cylindrisk metalltråd med diametern D föres fram med hastigheten U vinkelrätt mot sin längdriktning genom en stillastående atmosfär. (Resultatet blir detsamma, som om

gasen hade strömmat mot en orörlig tråd.) Man iakttager vid tillräcklig hastighet en svag friktionston (Hiebton), vilkens svängningstal N skall beräknas. Bakom tråden bildas en med hastigheten u, $(u < U)$, fortskridande luftlamell, längs vilkens gränslinjer man påträffar virvlar. Fig. 2 visar en schematisk bild av ett snitt genom virvelsystemet, vinkelrätt mot tråden, som rört sig längs figurens horisontella mittlinje.

Enligt v. KÁRMÁNS beräkningar är endast en sådan anordning stabil, där virvlar avlösas periodiskt, omväxlande på övre och undre sidan, varvid virvlar på motsatta sidan



Fortschreitendes stabiles Wirbelsystem nach v. KARMÁN mit abwechselnd rechts und links drehenden Wirbeln.

Fig. 2.

ha motsatta rotationsriktningar. Avståndet mellan de båda virvelstråken betecknas i fig. med h och avståndet mellan två på varandra följande virvlar med l. Då virvelsviten fortskrider långsammare än tråden, så avlägsnar sig en given virvel mer och mer från denna. För varje gång en virvel har kommit på avståndet $l/2$ från tråden, frigör sig en virvel på motsatta sidan, och när avståndet fördubblats, frigöres en virvel på samma sida som den förstnämnda. Virvellamellen har då utfört en hel svängning. Svängningstalet bestämmes tydligen av ekv. $Nl = U - u$. Man har funnit, att h/l är konstant $= 0{,}283$, (jfr figuren), samt att $u/U = 0{,}14$ och $l/D = 4{,}3$. Värdena för u/U och l/D äro konstanter, som ej bero på gasens natur och ej kunna teoretiskt härledas ur

andra storheter, utan måste bestämmas genom försök. Genom insättning av dessa värden i $Nl = U - u$ erhålles formeln

$$N = 0{,}20 \frac{U}{D}.$$

F. Krüger har prövat denna formel på observationer, som redan år 1878 gjordes av Strouhal.[11] Såsom det framgår av fig. 3, (D i mm), är i allmänhet överensstämmelsen god. Enligt Strouhal sjunker tonhöjden med stigande temperatur. Konstanten i formeln skulle alltså vara temperatur-

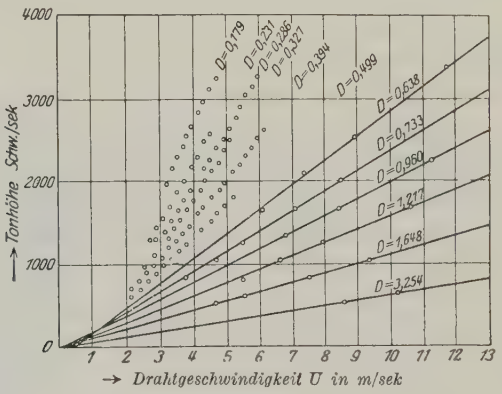


Fig. 3.

beroende. Denna detalj jämte åtskilliga andra i teorien, exempelvis det närmare förhållandet mellan friktionstonens svängningstal och trådens egensvängningsfrekvenser, äro ännu icke fullt klarlagda, men det torde ej vara tvivel om, att vi äntligen träffat kärnpunkten i den svårlösta gåtan om telefontrådarnas tonande. Wilh. Schmidt,[12] Strouhal och V. Bjerknes [13] ha uttalat sig i denna riktning. Den sistnämnde forskaren framhåller, att om fullkomlig symmetri rådde, två symmetriska virvlar med motsatta rotationsriktningar skulle bilda sig bakom det cylindriska hindret och samtidigt göra sig fria. Men då symmetrien aldrig är fullständig, frigör sig först den ena av virvlarna och därefter

den andra i regelbunden följd såsom nyss framställts. Mellan tråden och en virvel, som just håller på att bildas, existerar en attraktionskraft, som är betydlig, så länge virveln omedelbart hänger fast vid tråden, men som hastigt sjunker mot noll, när virveln efter att ha uppnått en viss storlek gör sig fri och driver bort med strömmen.[14] Man får på detta sätt en enkel förklaring till det faktum, att tråden svänger i ett plan, som är vinkelrätt mot vindriktningen.[15] De egentliga friktionstonerna spela i och för sig en rätt obetydlig roll, då de äro ganska svaga.[16] Det ljud, man vanligen lägger märke till, är trådens egensvängningstoner, vilka uppkomma genom resonans med friktionstonen.

En god överblick över det hela erhålles genom följande citat ur ett meddelande av STROUHAL.[1] (S. hade vid sina försök 1878 medelst en rotationsapparat låtit spända metalltrådar beskriva cirkulära banor med jämn hastighet.) »Eines Tages wollte ich bei einem dünnen Messingdraht den Reibungston bei recht kleiner Geschwindigkeit, die ich möglichst einhielt, bestimmen. Der Ton war kaum hörbar. Da vernahm ich — ganz erstaunt — wie der Ton langsam anschwoll, immer stärker wurde und schliesslich sich zu einem klaren, sonoren Ton entwickelte. Es war der durch den Reibungston angeregte Drahtton. — — — Jetzt suchte ich durch Reibungstöne die Drahttöne zu erhalten und war überrascht, wie viele solche Töne — Obertöne des Drahtes — ich isoliert erhielt, oft über 20. — — — Soll ein Drahtton durch einen nahezu gleich hohen Reibungston angeregt werden, so ist es notwendig, dass dieser Reibungston eine gewisse Zeit gleichmässig andauert. Dies ist aber nur bei schwacher Luftbewegung der Fall; bei schärferen Winden wechselt die Windgeschwindigkeit rasch, die Luft strömt stossweise, unruhig, unregelmässig. So ist es wohl begreiflich, dass die Telegraphendrähte nur bei schwachen Winden tönen, bei stärkeren schweigen. Sind mehrere Drähte von gleichem Material und gleichem Durchmesser nebeneinander gespannt, so ist damit nicht gesagt, dass sie gleichzeitig in

gleicher Höhe ertönen werden. Es handelt sich um den Drahtton; dieser ist aber bedingt durch die Spannung des Drahtes und seinen inneren Elastizitätszustand. Selten werden diese bei allen Drähten gleich sein. Deshalb werden im allgemeinen nicht alle solche Drähte auf denselben Reibungston ansprechen. Gewiss ist auch eine eventuelle Torsion des Drahtes nicht ohne Einfluss, dass sie jedoch die primäre Ursache des Summens wäre, kann ich nicht zugeben. — — — Was den Einfluss der Temperatur betrifft, so wird mit steigender Temperatur der Reibungston — wie ich nachgewiesen habe — tiefer, und auch der Drahtton wird unter sonst gleichen Umständen tiefer, weil durch Erwärmung die Spannung des Drahtes nachlässt.»

Mina egna erfarenheter av tonande trådar giva stöd åt Strouhals teorier. Ett par av dem förtjäna kanske nämnas. — Vid en promenad i blåsväder iakttog jag, att vindstyrkan tidtals höll sig ovanligt konstant. Telefonledningar i vindens riktning brummade svagt, medan däremot ledningar, som gingo vinkelrätt mot vinden, tonade kraftigt. Detta tonande blev oregelbundet, avtog i styrka och upphörde slutligen, när vinden blev ojämn. — En längre tid hade jag tillfälle observera en telefontråd och en kraftledningstråd, som på tämligen litet avstånd gingo nästan parallellt med varandra. Telefontråden tonade mycket ofta med talrika, flacka intensitetsmaxima, men kraftledningstråden var stum utom ibland vid lugnt väder och sträng vinterköld, då en skarp ton plötsligt kunde sätta in. Denna ton varade högst en eller annan minut, vanligen endast några sekunder, varefter den hastigt upphörde. Samtidigt märktes ingen ändring av telefontrådens tonstyrka. Fenomenet visar resonansens stora betydelse för tonandets uppkomst. — I mars 1930 rådde på min observationsort under nära en vecka likformig väderlek med svaga vindar och klara, kalla nätter. Några telefontrådars tonande nådde då regelbundet ett maximum kort före midnatt. Ett nytt, kortvarigt maximum inträffade strax efter soluppgången. En alldeles liknande iakt-

tagelse har beskrivits av GOCKEL. — I mars 1931 kommo några dagar av samma väderlekstyp. Därvid tonade samma trådar på samma sätt som året förut. Enligt GOCKEL skulle detta bero på att temperaturen reproducerats till storlek och gång. Jag vill fatta saken så, att framför allt vindförhållandena och atmosfärens grad av homogenitet hade reproducerats. Temperaturen spelade en mera sekundär men därför icke oviktig roll, i det den bidrog till att på ett gynnsamt sätt bestämma trådarnas mekaniska spänning och elasticitet.

Den viktigaste invändningen mot virvelhypotesen är att trådarna oftast och starkast tona vid vindstilla. Vid närmare undersökning av talrika fall har jag emellertid aldrig konstaterat absolut vindstilla utan i stället funnit luftdrag med en hastighetskomponent vinkelrät mot tråden. Att denna komponent kan vara ganska obetydlig men likväl framkalla resonanstoner, framgår av citatet från STROUHAL. Jag har nyligen blivit underrättad om att en person, som tagit sig för att observera tonande telefontrådar vid s. k. vindstilla, kommit till den slutsatsen, att ett tonande inträffar, endast om det existerar en luftströmning (riktningen bestämdes medelst tobaksrök), som i stort sett ligger vinkelrätt mot tråden.[17] Även en annan observatör, GREIPEL,[18] har »efter mer än trettioårig erfarenhet» kommit till samma resultat.

Det är en ytterst vanlig föreställning, att tonandet, när det sätter in efter en tids tystnad, förebådar omslag i väderleken. »Lyssna på telegraftrådarnas sång», säger en amerikansk vetenskapsman, »om den är låg, kommer vädret att växla om några dagar; om den är hög, kan det bli omslag om några timmar.» Flera forskare ha emellertid icke kunnat finna något som helst samband mellan variationerna i väderleken och trådarnas tonande. Så t. ex. LIESE,[19] som fört anteckningar för januari 1908, och GREIPEL. Egna iakttagelser ha endast bekräftat några få, sedan gammalt kända regler: trådarna tona oftare och i allmänhet med högre svängningstal om vintern än om sommaren, oftare nattetid

än om dagen, oftare vid svag vind än vid stark, och när de låta höra av sig efter en föregående tysthetsperiod, sker detta i de flesta fall vid sjunkande temperatur. SCHMAUSS har nog riktigt bedömt saken, när han yttrar, att en prognostisk betydelse tillkommer tonandet i samma mån den tillkommer ändringar i fråga om vind och temperatur. Naturligtvis händer det då och då, att en livlig akustisk aktivitet omedelbart åtföljes av omslag i vädret. Men stundom upphör en dylik aktivitet, utan att väderleken i märkbar grad skiftar karaktär. Å andra sidan inträffa ej sällan omslag utan föregående tonvarning. Telefontrådarna utanför Visby, för att taga ett färskt exempel, förebådade på intet sätt den svåra snöstormen över Gotland söndagen den 1 mars 1931.[20] Starka barometerfall, exempelvis till inemot 720 mm den 17 jan. 1931 i Visby, ha gång på gång observerats, utan att telefontrådarna tonat mer än vanligt. Om tonandet kommer av en skakningseffekt, ytterst beroende på ändringar i lufttrycksfördelningen, så borde detta yttra sig vid sådana tillfällen.

Ibland når tonandet från en telegraf-, telefon- eller kraftledningstråd en sådan intensitet, att den verkar störande på personer, som måste vistas i närheten. Ofta gäller detta träbyggnader på landet, särskilt om långa, raka ledningar gå direkt in genom väggen. Det har hänt, att resonansförhållandena legat så till, att hela huset fungerat som en sorts klanglåda, till blandat nöje för dess invånare. Telefonmontörer fästa därför gärna de grova linjetrådarna vid skorstenen eller vid en galge och använda klena trådar för själva införingen. I värsta fall kan man alltid förstämma en tonande tråd genom att på lämpligt sätt belasta den.

Litteratur m. m.

[1] V. STROUHAL, Meteorol. ZS 34, 190, 1917.

[2] M. ROBITZSCH, Meteorol. ZS 34, 86, 1917. — En av R. anförd, gammal uppfattning, att mässingstrådar ej kunna tona, vederlägges av STROUHAL.

[3] A. Gockel, Das Wetter, 33, 263, 1916.

[4] A. Schmauss, Das Wetter, 34, 73, 1917.

[5] Lord Rayleigh, Om eolsharpan i Phil. Mag. 7, 160, 1879; 29, 433, 1915; Theory of Sound Bd I, § 138, s. 212; Bd II, § 372, s. 412.

[6] Z. Carrière, Journ. de phys. et le Radium 6, 52, 1925; 7, 7, 1926.

[7] Figg. 1—3 äro hämtade ur Handb. der Physik Bd VIII (Akustik), 1927.

[8] L. Prandtl, Handwörterb. d. Naturwiss. Bd III (Flüssigkeitsbewegung), 1913.

[9] Th. v. Karmán u. H. Rubach, Phys. ZS 13, 49, 1912; Th. v. Karmán, Göttinger Nachr. 1911, s. 509; 1912, s. 547.

[10] F. Krüger [Lauth, Schmidtke. Marschner], 6 avh. i Ann. d. Phys. under åren 1914, -19, -20, -22.

[11] V. Strouhal, Wied. Ann. 5, 216, 1878.

[12] Wilh. Schmidt, Meteorol. ZS 34, 84, 1917; 35, 206, 1918.

[13] V. Bjerknes, ZS f. d. phys. u. chem. Unterr. 43, 55, 1930.

[14] Det motstånd en kropp erfar, när den föres fram genom en stillastående vätska, beror nästan helt och hållet på det arbete, som erfordras för att åstadkomma virvlarna.

[15] Om man sticker en cylindrisk käpp rätt ned i rinnande vatten och håller den löst mellan fingrarna, märkes, hur käppen söker utföra transversella svängningar.

[16] E. G. Richardsson, Proc. Phys. Soc. London 36, 153, 1924, anser (i motsats till andra forskare), att den periodiska virvelavlösningen väl indirekt, men ej i och för sig kan giva upphov till toner.

[17] Enligt benäget meddelande av folkskoleinsp. Joh. Linnman.

[18] R. Greipel, Das Wetter, 33, 240, 1916.

[19] C. Liese, Das Wetter, 33, 70, 1916.

[20] Mässfall inträffade i 17 av 69 kyrkor på Gotland, vilket ger en viss föreställning om ovädrets våldsamhet.

Uppgifter för de obligatoriska laborationsövningarna och det enskilda arbetet i kemi.

Av G. STARCK.

Enligt den nya kursplanen för realskola, gymnasium och lyceum skola obligatoriska laborationer i kemi förekomma dels i realskolan i båda de klasser, där kemi läses, dels i de båda högsta ringarna av realgymnasiet och de båda högsta kretsarna, av reallyceet, dels slutligen i den högsta ringen av latingymnasiet och den högsta kretsen av latinlyceet. Vidare skall i realgymnasiet och reallyceets båda högsta avdelningar ett enskilt arbete frivilligt kunna utföras av de elever, som så önska. Jämföra vi med den gamla ordningens frivilliga laborationer, som, fördelade på hela läsåret, hållit sig vid timtalet 3 för varje laborationsavdelning (t. ex. 1 tim. i kl. 5, 1 tim. i R III och 1 tim. i R IV), så ha vi att däremot uppställa för varje laborationsavdelning i realskolan $1 + {}^1/_2$, i realgymnasiet $1 + 1$, tillsammans $3\,{}^1/_2$ tim. En obetydlig ökning, som dock i praktiken torde bliva större på grund av att laborationerna bliva obligatoriska och laborationsavdelningarna större och kanske flera. Härtill kommer det enskilda arbetet, vars timplan säkert blir mycket tänjbar och kommer att upptaga, lagt räknat, 6 tim. Räknar man antalet elevtimmar, blir ökningen säkert betydande och våra laboratorier utnyttjade i mycket större utsträckning än förut.

För att möta de nya krav på den experimentella kemiundervisningen, som den nya ordningen ställer på lärarna, har förf. uppgjort en arbetsplan för laborationerna och det enskilda arbetet i kemi och framlagt den i årsredogörelsen för Högre reallärоverket på Norrmalm 1929—30, till gagn möjligen för de lärare, som då stodo inför uppgiften att organisera denna del av sin undervisning. Den återgives här något överarbetad och utökad med några reflexioner på grundval av hittills gjorda erfarenheter.

Förslag till uppgifter för de obligatoriska laborationsövningarna och det frivilliga enskilda arbetet.

Realskolans 3 (resp. 4) klass. Den nya kursplanen föreskriver i likhet med den äldre, att kursen så vitt möjligt skall anslutas till lärjungarnas under laborationerna gjorda iakttagelser. Da även timtalet är oförändrat, blir här allt vid det gamla.

Realskolans 4 (resp. 5) klass. Den anslagna tiden är 1 timme varannan vecka; övningarna skola dels stå i samband med kursen, dels vara mera fristående. Man har att räkna med 15—18 arbetstimmar för varje lärjunge. De med kursen sammanhängande laborationerna äro väl lämpligen organiska försök, gemensamma för hela klassen och direkta tillämpningar pa kursen. Följande urval kunde tjäna som mönster:

1. Framställning av metan av aluminiumkarbid och vatten.
2. Bestämning av alkoholhalten i en vätska av vintyp genom destillation och destillatets prövning med alkoholometer.
3. Framställning av estrar (t. ex. etylacetat, amylacetat, etylbutyrat) som provrörsförsök; försök med etylacetat, som visa esterns förtvålning.
4. Undersökning av fetternas viktigaste egenskaper (spec. vikt, löslighet, smältpunkt); framställning av tvål.
5. De viktigaste sockerarterna och deras förhållande till Fehlings lösning; försockring av stärkelse, enzymatiskt och med syra.
6. Äggviteämnen, beståndsdelar och viktigaste reaktioner.
7. Torrdestillation av trä.

Anm. Förs. 2 lär icke medhinnas på en timme med mindre destillationsanordningarna äro av läraren pa förhand iordningställda.

De fristående övningarna torde lämpligen förläggas till vårterminen och utgöras av oorganiska synteser. Här kan man tänka sig antingen framställning av några föreningar av en viss metall eller kanske ännu hellre arbeten med några typiska syntesmetoder. I det senare fallet må föreslås metoder för framställning av salter:

8. Neutralisation av en syra och en bas; exempel på lätt kristalliserande, beständiga salter äro natriumklorid, -nitrat och -sulfat, kaliumklorid, -nitrat och -sulfat, ammoniumklorid och -sulfat, bariumklorid och -nitrat.

9. Metalloxid + syra. Exempel kopparsulfat, -klorid och -acetat, zinksulfat, blyacetat.

10. Metall + syra; först väteutdrivande metaller, t. ex. magnesium, zink eller aluminium + svavelsyra, av den sistnämnda metallen framställes alun genom att lösningen av sulfatet försättes med förut framställt kaliumsulfat.

11. Metall + syra; icke väteutdrivande metaller. Lämpliga salter äro blynitrat, kopparsulfat (av koppar och svavelsyra + salpetersyra eller luft, ej konc. svavelsyra), kopparklorid och -acetat lämpligen med luft som oxidationsmedel).

12. Utfällning av ett olösligt salt. Exempel: kalcium- och blysulfat, kalcium- och kopparkarbonat m. fl.

13. Utfällning av ett olösligt salt t. ex. framställning av silverklorid ur en 10-öring, av konversionssalpeter.

14. Saltframställning genom utdrivande av en flyktig syra, såsom klorväte eller kolsyra.

15. Framställning av ett flyktigt salt t. ex. ammuniumkarbonat genom upphettning av ammoniumklorid och natriumbikarbonat.

Realgymnasiets båda högsta ringar.

Det enskilda arbetet i kemi kan vara enbart experimentellt, enbart litterärt eller en kombination av båda. Det förstnämnda kräver naturligtvis bokliga studier i läroböcker och uppslagsböcker, men om det inte utmynnar i någon annan litterär produktion än en laborationsredogörelse, ma det betecknas som rent experimentellt. Lösandet av en experimentell uppgift kan åtföljas av en exposé över det bearbetade området, och det enskilda arbetet utgör da en kombination av ett rent experimentellt och ett litterärt arbete.

Är det nu fråga om ett experimentellt arbete, vilket nog torde bliva regel, sa gäller den första fragan, när det skall utföras. Det torde vara lämpligt och nödvändigt att taga i anspråk först och främst de obligatoriska laborationstimmarna och således befria dem, som valt att utföra ett enskilt arbete, från det laboratoriearbete, som deras kamrater utföra. Dels blir det svårt att på annat sätt finna den erforderliga tiden, dels kan man nog vänta sig, att sådana elever i varje fall komma att bedriva enskilt arbete på de ordinarie laborationstimmarna och visa mindre intresse för andra uppgifter. Men det är också tydligt, att laborationstimmarna — 1 i veckan — icke kunna räcka till för ett kvantitativt ej alltför obetydligt experimentalarbete, utan att laboratoriet

måste hållas tillgängligt för eleverna även på tider utanför arbetsordningen. Även om eleverna härvid enligt sakens natur böra utföra sitt enskilda arbete med ett visst mått av självständighet, torde man icke kunna lämna dem alldeles utan tillsyn på laboratoriet. Härtill äro deras kunskaper och förutseende för små, vilket förstorar de risker, som alltid åtfölja praktiskt kemiskt arbete. På detta stadium saknas också laboratorievana och laboratoriehyfsning i betänklig grad; en sträng disciplin måste uppehållas på ett elevlaboratorium, där kanske ett betydande antal arbetar, för att icke tillståndet snart skall bli kaotiskt. Ej heller kunna eleverna förutsättas vara så väl orienterade i institutionens samlingar, att de utan stor tidsspillan kunna åtkomma behövliga preparat och utensilier. Det måste därför ur alla synpunkter anses önskvärt för att icke säga nödvändigt, att arbetet sker under lärares uppsikt. Möjligen kunde den ökning av kemilärarnas arbete, som följer härav, och som icke förutsetts i skolstadgan, minskas genom att en pålitlig, med institutionen förtrogen och i övrigt något så när kompetent elev i högsta ringen finge utföra sitt enskilda arbete i form av ett amanuensskap — om det nu lyckas att finna någon till denna otacksamma syssla villig.

Det enskilda arbetet bör vara svårare än det obligatoriska laboratoriearbetet, det bör kräva mer av bokstudier än detta, fordra mångsidigare och noggrannare arbete, ge anständiga resultat i form av rena preparat i känt utbyte eller i form av tillfredsställande siffror och vara kombinerat med uppvisade goda kunskaper om den behandlade detaljen, helst också med någon översikt över detta och angränsande områden. Men man bör noga undvika att sätta fordringarna för högt eller rättare sagt att giva arbetet en felaktig inriktning. Det behöver väl icke framhållas, att det ej är fråga om vetenskapligt forskningsarbete utan om en träning i experimentellt arbete, ernådd genom utförande av från litteraturen väl kända, helst av läraren själv utförda försök. Man bör kunna garantera, att försöket lyckas, om givna föreskrifter följas. I själva verket äro elevernas experimentella ovana och tafatthet så stora, att även mycket enkla uppgifter kunna bereda dem stora svårigheter. Man finner här snart, vilket minimalt värde lärarens demonstrationsundervisning har för det, som borde vara kemiundervisningens mål: förmågan att uppställa och genom eget arbete besvara ett kemiskt problem.

Ett som det syns mycket gott förslag i fråga om det enskilda arbetets organisation har framställts av en kollega till förf., det nämligen, att över uppgifterna till enskilt arbete i kemi ett kortregister upplägges, där varje kort upptager benämningen på det

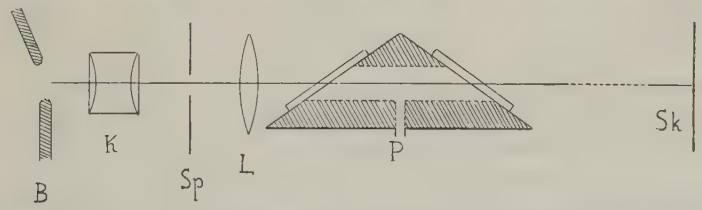
försök eller de försök, som eleven har att utföra, eller ock uppgift på ett studiearbete med angivande av boktitlar och sidor. Dessutom får varje försök sitt kort, varpa det noggrant beskrives med en för utförandet tillräcklig delaljrikedom. Varje elev får nu en uppgift och kan, då han börjar sitt arbete för dagen ur registret uttaga de kort, som han behöver. Fördelen med detta system är, att eleven får en på svenska avfattad, skriftlig handledning, medan han eljest skulle följa antingen anvisningarna i en i de flesta fall tysk eller engelsk handledning, som dels kan vara upptagen, dels ej alltid så lätt att förstå, eller ock lärarens muntliga föreskrifter, som lätt glömmas. Systemet kommer att medföra stor tidsvinst både för läraren och eleverna, och genom att eleven lämnas att på egen hand följa föreskrifterna gives en tillräcklig bred marginal för en viss självständighet.

Efter att under den gångna delen av läsåret ha använt ett efter dessa principer upplagt kortsystem kan förf. därom avgiva följande omdöme. Den, som ger sig i färd med kompilerandet av denna handledning på lösa lappar, får bereda sig på ett betydande arbete. Det är icke fråga om en enkel avskrivning; det gäller först och främst i de flesta fall att översätta till god svenska och därvid ständigt ha i minnet elevernas obekantskap med tekniska uttryck och oerfarenhet i fråga om kemiskt arbete, men därjämte också att till ett enhetligt måttsystem omräkna handledningarnas stundom kaotiska föreskrifter. Sålunda upptager exempelvis varje beskrivning av framställningen av ett svarlösligt salt föreskriften, att fällningen skall filtreras och noga tvättas på filtrum. Det är onödigt att säga åt en kemist, att en fällning skall filtreras och tvättas, men här måste det sägas. — Man träffar i handledningarna föreskrifter sådana som, att 1 del av det blandas med 2 delar av det; en sådan uppgift måste ersättas av bestämda viktsmängder. Eller slutligen, att man skall tillsätta så och så många cm^3 lösning av 25° Baumé, en för våra elever obegriplig uppgift, som måste omformuleras. Det tidsödande och föga angenäma arbetet på ett dylikt kortregister lönar sig emellertid och kommer att av ingen ångras; tvärtom torde det helt enkelt bliva en nödvändighet, om antalet laboranter är normalt, 10—15 st. I varje fall betyder tillgången därav en stor lättnad för läraren, och den har också visat sig uppskattad av eleverna. Man behöver icke vara rädd för att säga för mycket på dessa kort; det kommer alltid att finnas dunkla punkter, som kräva förklaring.

(forts.)

Ljusets brytning i gaser.

Ljusets brytning i gaser beröres vid den elementära undervisningen ytterst knapphändigt. Den atmosfäriska refraktionen, hägringsfenomenet och brytningen i varm luft över en låga l. dyl. få utgöra bevis för luftens brytningsförmåga; någon på experiment fotad kontakt med dennas storleksordning torde icke bibringas eleverna. Författaren till dessa rader hade av denna anledning för någon tid sedan börjat reflektera över möjligheten av att åstadkomma en enkel och för skolbruk lämplig variant av Biot och Aragos' klassiska prismaförsök. Gjorda överslagsberäkningar gåvo vid handen, att själva effekten mycket väl kunde objektivt påvisas genom förskjutningen av en på en skärm projicierad spaltbild vid evakuering av ett luftfyllt prisma (eller vice versa). Då man vidare kan bortse från de nödvändiga täckplattornas inflytande på strålgången samt även vid bristfällig injustering av prismat kan anse villkoren för minimideviation uppfyllda, borde



beräkningen av brytningsindex hos luft av normal beskaffenhet ej erbjuda några svårigheter för eleverna. Nedan följer nu redogörelse för det på grundval av dessa kalkyler förfärdigade prismat, den optiska uppställningen samt evalueringen av en uppmätning.

Prismat gjöts av mässing efter en trämodell. Höjd = 7 cm; normalsnittets (likbent triangel) sida = 22 cm, bas = 41 cm. Tvärs genom prismat är borrat ett hål (diam. = 3 cm) för ljusgenomgången och vinkelrätt mot detta ett annat (diam. = 0,8 cm) för evakueringen, försett med ett medelst picein inkittat glasrör[1]. Det förra hålet är vid sidoytorna täckt med plattor av planparallellt spegelglas (12 × 6 × 0,5 cm), fastkittade medelst picein. För undvikande av störande ljusreflexer inuti hålet bör detta helst svärtas, t. ex. med en blandning av schellacksprit och kimrök. — Som av prismats dimensioner framgår, är brytande vinkeln c:a 140°.

Ljuset från en båglampa *B* koncentreras medelst en kondensor *K* på en vertikal, smal spalt. Mellan spalten och prismat *P* ställes

[1] Mera pålitligt är att löda fast ett mässingsrör och för säkerhets skull överdraga skarven med picein.

en projektionslins L av relativt kort brännvidd, och linsens läge justeras så, att bilden av spalten faller på en långt bort, minst 4 à 5 meter från prismat belägen skärm. Prismat bör stå nära intill linsen och hålets axel sammanfalla med det svagt konvergenta strålknippets axel (inställning efter ögonmått tillräcklig).

Är prismat fyllt med luft av atmosfärstryck, går strålknippet obrutet igenom men devieras vid evakuering (fullständig dylik naturligtvis ej nödvändig). Om läraren genom försök med glasprisma förut visat, att minimideviationen praktiskt taget till sin storlek är konstant inom ett ganska stort område för infallsvinkeln och han dessutom påpekar, att de eventuellt ej fullt planparallella glasplattornas förskjutning av strålknippet ej röner märkbart inflytande av de små förändringar i knippets riktning, som bli följden av evakueringen, kunna omedelbart följande formler för symmetrisk strålgång användas, där n betecknar absolut brytningsindex hos (den yttre) luften i normaltillstånd, i infallsvinkeln, b brytningsvinkeln ($b > i$), A brytande vinkeln samt D deviationsvinkeln:

$$\left.\begin{aligned} 2(b - i) &= D \\ 2b &= A \end{aligned}\right\}$$

Härav

$$\left.\begin{aligned} \frac{A - D}{2} &= i \\ \frac{A}{2} &= b \end{aligned}\right\} \text{ och } n = \frac{\sin b}{\sin i} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{A - D}{2}}.$$

Vinkeln D mätes genom spaltbildsförskjutningen. Är l avståndet mellan skärmens och prismats bisektrisplan samt f förskjutningen, fås tg $D = \frac{f}{l}$. Vid ett försök var $f = 7$ mm och $l = 4{,}2$ m, varav $D = 0°{,}10$. Då A, som redan nämnts, är 140°, erhölls $n = 1{,}0003$ (med 5-ställiga tabeller).

Lätt kan visas, att koldioxid av normaltryck bryter mera än luft av motsvarande tryck, om man jämför spaltbildernas läge i de båda fallen. Betecknar N koldioxidens, n luftens absoluta brytningsexponent och D förskjutningsvinkeln, kan N beräknas ur formeln

$$\frac{N}{n} = \frac{\sin \frac{A + D}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$$

Ovannämnda bestämning av luftens brytningsexponent torde emellertid vara tillräcklig för att ge eleverna en föreställning om den kvantitativa sidan av ljusets brytning i gaser.

Torsten Wetterblad.

Bokanmälningar.

J. W. N. Sullivan, *Från Kopernikus till Einstein.* Vetenskap och Bildning. Albert Bonniers förlag, Stockholm 1930, 193 sid., kr. 4: 75.

Den teoretiska fysiken, som har till ändamål att matematiskt beskriva materiens struktur och förhallande, tenderar alltmer att ge en framställning av universum medelst matematiska relationer mellan storheter, som vi icke kunna bilda oss någon föreställning om. Denna vetenskap blir tillgänglig endast för matematici. Men samtidigt rör den sig med begrepp av allmänmänskligt intresse, och när fysikerna förkunna, att tiden är relativ, universum ändligt ehuru gränslöst och att tyngdföreteelserna bero icke på den mystiska gravitationskraften utan på rymdens krökning, då önska många även icke-matematici få en föreställning om de nya fysikaliska teorier, som leda till så egendomliga resultat. Sullivan har skrivit sin bok »Från Kopernikus till Einstein» just för sådana intelligenta läsare, som sakna vetenskaplig träning, i avsikt att på ett lättfattligt sätt göra dem delaktiga av de väsentligaste vetenskapliga begreppen. Trots att icke en enda formel använts, har författaren i stort sett lyckats utomordentligt väl med sin framställning.

En intressant historik skildrar, hur medeltidsmänniskans naturuppfattning övergavs och den moderna vetenskapen började framväxa genom Kopernikus', Keplers och Galileis arbeten. Andra kapitlets framställning av de Newtonska begreppen rum, tid och massa är synnerligen intressant; på samma gang den gör full rättvisa åt Newtons storverk, väcker den tanken på att dessa begrepp icke äro utan alternativ. Läsaren föres vidare genom 1800-talets fysikaliska föreställningar fram till den nuvarande tiden; författaren visar, huru teorier uppstå, utvecklas och påbyggas, tills de trots allt visa sig otillräckliga, när det gäller att på ett enkelt sätt förklara erfarenheten. Vetenskapen tvingas att införa nya hypoteser; kvantteorien och Einsteins relativitetsteori växa fram som följd av de experimentella iakttagelserna. Det ligger i sakens natur, att de två kapitel, som behandla dessa ytterligt abstrakta, nya begrepp, äro de mest svårtillgängliga i boken. Detta kan ej läggas författaren till last, tvärtom bör hans tanke-

väckande och klara framställning i hög grad bidraga att underlätta förståendet för de nya tänkesätten, ehuru vi icke kunna göra oss en bildlik föreställning om vad teoriernas ekvationer »betyda». I det tionde kapitlet skisseras de nya geometrierna och Einsteins allmänna relativitetsteori på ett synnerligen förtjänstfullt sätt. Läsaren bringas till insikt om att världens matematiska struktur kan framställas lika väl med hjälp av geometriska begrepp som med utgångspunkt från Newtons massa, kraft etc. Rent logiskt sett äro Newtons och Einsteins teorier likställda, men under det att gravitationslagen och rymdens oändlighet för till omöjliga konsekvenser, innebär Einsteins ändlösa ehuru gränslösa universum inga orimligheter.

Boken avslutas med en kortfattad framställning av de nyaste problemen samt några intressanta reflektioner angående vetenskapens förhållande till vårt vetande och vår tro. Sullivans arbete är alltigenom vederhäftigt och bör med intresse läsas av envar, som söker kännedom om de nyaste fysikaliska åskådningarna.

Anna Beckman.

Den syvende skandinaviske matematikerkongress i Oslo 19—22 august 1929. Kongressens videnskapelige forhandlinger. A. W. Brøggers boktrykkeri, Oslo 1930, 197 sid., häft. kr. 7:50, inb. kr. 10:—.

År 1902 firade Norge 100-årsminnet av Niels Henrik Abels födelse genom en matematikerkongress, som var märklig både ifråga om tillslutning och storartade anordningar. I kongressen deltog en representativ samling av tidens främsta matematiker, till densamma hade Björnson skrivit en ståtlig kantat, och *Acta mathematica* bidrog med tre digra jubileumsband. År 1929 begick Norge minnet av Abels död genom hållandet av en matematikerkongress, den sjunde skandinaviska. Vid detta tillfälle ålåg det dessutom kongressens president att lämna kongressen meddelande om Mittag-Lefflers och Ivar Fredholms frånfälle.

Mittag-Leffler var initiativtagaren till de skandinaviska matematikerkongresserna, av vilka den första hölls i Stockholm 1909. Av de senare ha två hållits i Köpenhamn, två i Oslo, en i Stockholm och en i Helsingfors. Av deltagareantalet att döma synes intresset för kongresserna nu vara mindre än i början.

Redogörelsen för den sjunde kongressens förhandlingar innehåller över tjugo avhandlingar och föredrag av dels översiktligare och dels speciellare art. De svenska bidragen äro påfallande få. Däremot har Norge gjort allt, som kan begäras. Kongressens president, professor Alf Guldberg, kåserar i sitt öppningstal om

olika matematiska frågor av allmänt intresse. I ett föredrag »Über die Grundlagendiskussion in der Mathematik» ger Th. Skolem en intressant redogörelse för de antinomier, som uppträda inom mängdteorien och de försök, som gjorts att övervinna dem. Öystein Ore har en redogörelse »Neuere Untersuchungen über Abelsche Gleichungen». Han framhåller, att Mittag-Leffler, som hyste stor beundran för Abel, nästan betraktade sig som Abels lärjunge i andra generationen. Han ger också uttryck för den åsikten, att det allmänna intresse för matematik, som man finner i Norge, till en del kan återföras på beundran för Abel. — De speciella avhandlingarna behandla talteoretiska och funktionsteoretiska ämnen, integrationsteori och differentialekvationer m. m. Ett föredrag av finländaren E. J. Nyström över praktisk upplösning av integralekvationer har i utvidgad form publicerats i Fredholmsbandet av *Acta mathematica* och återfinnes alltså ej i kongressens förhandlingar.

D. Enskog.

Chalmers Tekniska Institut 1829—1929. Minnesskrift utgiven med anledning av institutets 100-åriga tillvaro. 683 sidor 4:o. N. J. Gumperts Bokhandel. Göteborg.

Minnesskriften inledes med en omfattande redogörelse för institutets tillkomst och utveckling författad av institutets rektor, professor Grauers. Redogörelsen behandlar undervisningen och läroplanerna, institutets ekonomiska förhållanden och byggnadsverksamhet samt dess styrelse och lärarkår. De biografiska anteckningarna kompletteras med en av professor Bodman författad översikt av de utgangna Chalmeristernas levnadsbanor. I övrigt innehåller minnesskriften ett trettiotal bidrag av från »Chalmers» utexaminerade ingenjörer. Några av dessa äro ägnade åt minnen och historiska översikter, och man finner däribland bidrag av norske statsministern Gunnar Knudsen och dr. Gustaf Ekman. Flera bemärkta »Chalmerister», däribland direktörerna J. S. Edström och Hugo Hammar, ha uttalat sig i organisatoriska och undervisningsfrågor, och slutligen äro ett tiotal av bidragen av teknisk-vetenskaplig natur. Bland författarnamnen lägger man här särskilt märke till dr. Gustaf Dahléns.

G. Borelius.

Hjalmar Berg, *Fredlig bragd.* Svenska bokförlaget, Stockholm 1930. 144 sid., kart. kr. 3: 75.

Uppfinnaren är en hjältetyp, som, fastän hans bragd är av fredlig art, väcker varje pojkes livliga intresse. Hjalmar Bergs

bok med dess berättelser om hur stora upptäckter och betydelsefulla uppfinningar blivit till, kommer därför att läsas med största glädje, i all synnerhet de kapitel, där skildringen sväller ut till en välgörande bredd. Bland dem må nämnas Andrées redogörelse för en av sina äventyrliga ballongfärder och skildringen av »Örnens» försök att nå nordpolen. Hit höra också Amerika-zeppelinarens färd över Atlanten, berättad av en av de medföljande officerarne, och Charles Lindberghs skildring av sin berömda flygning New York—Paris.

John Ericssons propeller liksom den beryktade lokomotivtävlingen saknas icke, och om de många försöken att förena den gamla och den nya världen med telegrafkablar läser man med verklig spänning. I kapitlet om »den talande metallskivan» berättas, hur Bell av en slump gjorde sin betydelsefulla uppfinning. Även radions förhistoria skildras.

Författaren berättar så trevligt, att man skulle önska, att han ibland vore något mer utförlig. Det korta kapitlet om ljudets hastighet skulle exempelvis ha vunnit i intresse och aktualitet, om ekolodet medtagits.

Att författaren genomgående använder metersystemet, även om de skildrade händelserna tilldragit sig långt före detta måttsystems tillkomst, är naturligtvis avsiktligt, och däremot kan endast riktas den anmärkningen, att ett litet påpekande om detta avsteg från den historiska sanningen varit önskvärt.

Egentligen avsedda för folkskolan och fortsättningsskolan, kunna dock dessa berättelser och skildringar ur fysikens historia vara till nytta och glädje även för realskolans elever.

Ernst Herlin.

Ernst Foghammar, *Räknelära för realskolor, kommunala mellanskolor, samskolor och flickskolor.* Sv. Bokförlaget, Stockholm 1929. Första delen 78 sid., kart. kr. 2: 10. Andra delen 120 sid., kart. kr. 2: 75.

Algot Winberg, *Lärobok i matematik för 4-åriga realskolor, kommunala mellanskolor, högre folkskolor* och därmed jämförliga läroanstalter. J. A. Lindblads förlag, Uppsala 1929, IV: 1—2, 124 sid., häft. kr. 1: 60, kart. kr. 1: 90; IV: 3—4, 163 sid., häft. kr. 1: 85, kart. kr. 2: 20.

Låt mig först som sist få säga, att jag inte har många invändningar att göra mot någon av dessa böcker, om jag betraktar dem som rena exempelsamlingar. De ha båda, såvitt jag kan se, många bra och till svårighetsgraden väl avpassade exempel på

allt vad man behöver lära ut, om man är lärare, och kunna, om man är elev. Dock delar jag inte W:s förhoppningsfulla tilltro till elevernas kunskaper, då de börja den 4-åriga realskolan. Jag saknar en avdelning repetitionsexempel på hela tal; slutnollornas behandling vid multiplikation och division är, för att ta ett exempel, säkerligen något att påminna om. Och i F:s bok saknar jag på sista klassens kurs ett (gärna kort) kapitel om negativa tal. Stadgan nämner intet om saken, det är sant, men i realskoleexamensuppgifterna förekommer den. Ett exempel, givet H. T. 1919, där utbrytning av -1 behöver utföras, påträffas lustigt nog hos F. men ändrat, så att svårigheten undgås.

Det tycks mig som om F:s förklaringar och anvisningar vore en smula diktatoriska. På en del ställen ville jag helst slippa dem, t. ex. på reguladetri det gamla, numera väl sällan använda schemat: »*så* mycket kostar», »*hur* mycket kostar». På andra ställen ville jag ha mer. I inledningen till division i decimalbråk och bråk saknar jag bland alla anvisningar om, *hur* man gör, en förklaring om, *vad* man gör. 5 : 0,2 kanske går bra utan förklaring (innehållsdivision) likaså 72 : 800 (delningsdivision), fast även här bör man väl omtala, vad det är fråga om. Men $2\frac{1}{8} : 3\frac{2}{5}$ är värre, och att här gå fram utan en förklaring är, såvitt jag förstår, högst olämpligt för att nu välja ett mycket milt uttryck. Dessa svårigheter undgår W., som här endast repeterar saker som förutsättas vara bekanta vare sig de nu äro det eller inte.

F:s uppgift, att 1 bok skrivpapper = 24 ark, var korrekt för cirka 25 år sedan. Nu är den felaktig; allt papper säljes efter 25 ark per bok, 500 per ris. W. har här den egendomligt formulerade uppgiften att »i praktiken» räknas 25 ark. Finns det någon teori på detta område, skild från praktiken?

F. tar ekvationsläran från början helt efter axiomen, som omsorgsfullt genomgås. W. har den väl nu allmänt använda, så vitt jag vet av Lindhagen först genomarbetade, metoden med aritmetiskt resonemang.

Konjugat- och kvadreringsreglerna sakna hos W. inledande exempel. Är det inte lämpligare att låta eleven upptäcka reglerna ur exemplen än att gå motsatt väg?

Formler kan man ju aldrig helt undgå, men mera invecklade sådana måste väl anses som ett oting. Hos F. finner jag $x = \frac{a}{1 + \frac{pt}{100 \cdot 360}}$ tryckt med fetstil, hos W. cirkelringens yta = $= \pi(R + r)(R - r)$. Den förra tycks mig helt olämplig, den senare är som påpekande av en vacker sifferbehandling bra — men jag

hoppas, att den inte skall inläras. Stereometriformlerna äro ju på detta stadium en besvärlig sak. Bevisa dem kan man ju ej, men bör man inte åtminstone försöka att göra dem troliga eller praktiskt verifiera dem? Ingen av dessa två läroböcker försöker sig på den saken.

Båda böckerna ha ett kapitel med laborationsanvisningar, fylligast hos W. F. har dessutom en förberedande geometrikurs samt — under rubriken: Räkenskaper — material till en kortare bokföringskurs. Antecknas bör även, att F. i slutet av varje årskurs liksom före den första har ett antal blandade exempel i form av provräkningar, vilket möjligen kan visa sig vara ett gott grepp.

Ingen av dessa båda böcker saknar sina förtjänster, men fast jag uttryckligen betonar detta, kan jag ändå inte undgå att göra mig den frågan: behövas de? Det finns redan ett icke ringa antal goda böcker för dessa stadier, och så originella grepp på ämnet ha dessa två dock ej, att de kunna rekommenderas framför de redan förefintliga. Är det kanske bara så, att varje förlag vill ha sin bok (och Svenska Bokförlaget helst flera)? Jag vill blott uttrycka en förhoppning om, att det inte måtte gå så långt, att varje lärare vill ha sin, och jag är tacksam att inte behöva sitta i en granskningsnämnd och ge passersedlar.

Bengt E. Nyström.

Sigurd Eriksson, *Lärobok i matematik för tekniska läroverk. Del II.* Lindska Bokhandeln, Örebro 1930, 153 sid., kr. 4: 25.

Matematikkursen vid våra tekniska läroverk omfattar med något undantag samma huvudområden som realgymnasiets kurs. Vissa av dessa områden behandlas dock vid de förstnämnda skolorna ej så ingående, medan andra delar där genomgås mera utförligt. Hit hör framförallt infinitesimalräkningen och dess tillämpningar. Följden härav är, att de läroböcker, som skrivits för realgymnasiet, ej så bra lämpa sig för den tekniska skolformen. Det har därför länge varit ett önskemål att få en lärobok i matematik, innehållande hela den kurs, som läses vid de tekniska läroverken. Att detta nu börjat förverkligas är lektor Sigurd Eriksson förtjänst. Den lärobok han nyligen utgivit omfattar andra och tredje klassernas matematikkurs vid Örebro tekniska gymnasium. Förf. har därför kallat den del II. En första del, motsvarande första klassens kurs, är planerad att utkomma till höstterminens början.

Läroboken börjar med funktioner och deras grafiska framställning som en inledning till derivatabegreppet. Efter genomgången

härav följer härledning av deriveringsregler och de elementära funktionernas derivator ävensom en metod för grafisk derivering. Tillämpningar på differentialräkningen äro beräkningar av maxima och minima samt obestämda uttryck. I samband härmed genomgås konstruktion av kurvor i såväl rätvinkliga som polära koordinater. Integralräkningen börjar med angivandet av grundintegraler samt en metod för grafisk integrering. Efter genomgång av integreringsreglerna visas exempel på integrering genom uppdelning i partialbråk, varjämte några irrationella funktioners integraler evalueras. Följer så införandet av den definitiva integralen och påvisandet, att den utgör gränsvärdet för en summa. Tillämpningarna på detta område äro rikliga. De omfatta beräkning av ytor, volymer, kurvlängder, tyngdpunkter, tröghetsmoment. Härefter kommer analytisk behandling av första- och andragradskurvorna. Vid de senare börjar förf. med ellipsen och betraktar cirkeln som specialfall av denna. Därefter behandlas hyperbeln och slutligen parabeln såsom gränsfall av ellips eller hyperbel. Nästa område, som kommer till behandling, är serier. Av dessa medtagas (utom aritmetiska och geometriska) även binomialserien samt en del viktiga funktionsserier. Till slut visas, hur man löser separabla differentialekvationer av första och andra ordningen. Såsom tillämpningar genomgås ett antal instruktiva exempel, hämtade ur mekaniken, elektricitetsläran och värmeläran. — Även föregående avdelningar åtföljas av väl valda typexempel, som i allmänhet försetts med lösningar.

Vissa delar av föreliggande lärobok gå sålunda avsevärt utöver reallinjens kurs. Det synes därför anmälaren, att densamma även skulle kunna användas som vägledning åt de elever vid realgymnasierna, vilka utföra enskilt arbete i ämnet matematik. Som lämplig exempelsamling rekommenderas i så fall »Övningsuppgifter till grunderna av differential- och integralräkning», Örebro 1924, av samme författare. *Einar Friman.*

Elis Hjalmar, *Lärobok i fysik för realskolor, mellanskolor och flickskolor.* Första delen: allm. fysik, värmelära, magnetism, elektrostatik. Andra delen: elektrodynamik, optik, akustik. Magn. Bergvalls förlag, Stockholm 1930 o. 1931; varje del 120 sid., kart. kr. 2: 90.

Redan ett flyktigt genombläddrande av lärobokens bägge hittills utkomna delar (den sista delen väntas föreligga färdig inom kort) ger vid handen, att den till författare har en intresserad och för utvecklingen vaken pedagog och en driven experimen-

tator. Vid noggrannare genomläsande fäster man sig vid en bredd i framställningen och en rikedom av detaljer, som genast föranleda den frågan: kan man verkligen på realskolestadiet medhinna allt detta? Anm. har särskilt härvid i tanke den f. ö. utmärkt välskrivna avdelningen elektrodynamik. Den nya läroverksstadgan föreskriver för klass 4^5 (3^4) genomgående av de enklaste elektrodynamiska fenomenen och har säkerligen därmed åsyftat ett efter det ringa timantalet (2 t., varav 1 t. laborationer varannan vecka) avpassat urval av de *grundläggande* fenomenen. Såvitt anmälarens egen erfarenhet kan tala, bör man vara glad, om man i det treåriga latingymnasiets första ring — där förutsättningarna för en mera matematisk behandling av ifrågavarande avsnitt äro de minsta möjliga — kan medhinna så pass mycket. — Det må emellertid tilläggas, att, så som läroboken är skriven, det ej bör bereda den enskilde läraren några svårigheter att urplocka, vad han anser böra göras till föremål för behandling i vederbörande realskoleklass.

Förf. ådagalägger en berömvärd förmåga att med enkla medel experimentellt belysa de fysikaliska lagarna och meddelar till lärarens tjänst ett flertal detaljuppgifter om materiellen. Figurerna äro utmärkta, räkneexemplen (med frågor) synas vara instruktiva och lagom svåra.

Förf. använder ganska ofta frågeformen i sin framställning. Anm. måste erkänna sig vara föga förtjust över förekomsten av frågor i en *lärobok*. Frågorna höra hemma i preparationen och läxförhöret eller bland räkneexemplen.

I fråga om det metodiska är anmälaren på vissa punkter av avvikande mening mot förf. Då emellertid uppfattningen av metodiska frågor är mycket individuell, finns ingen anledning att i detta sammanhang precisera den egna ståndpunkten.

Bortsett från reservationen beträffande det framlagda lärostoffets anpassning efter kursplanerna i *kvantitativt* hänseende anser anm., att lektor Hjalmar riktat läroboksliteraturen med ett alster av hög *kvalitet*. Med intresse emotses den avslutande delen. Arbetet i sin helhet kommer helt visst att bliva av stort värde för fysikundervisningen.

Torsten Wetterblad.

Knut Parck, *Lärobok i kemi för realskolan.* Gleerups förlag, Lund 1930, 57 sid. text., 18 ill., kr. 1: 10.

Ovanstående arbete innehåller realskolekursens oorganiska del kort framställd på grundvalen av 39 numrerade experiment. Dessa komma i väl vald ordning och leda snart fram till atomteorien

och kemiska formler. Därefter följa baser, syror och salter, elektrolys och jonteori. Kolsyra, fosforsyra, kiselsyra och deras salter behandlas i ett kapitel, varefter boken avslutas med en del data ur kemiens historia.

På en del punkter är formuleringen mindre väl funnen och några detaljfel ha insmugit sig.

S. 17. »Då vätgasen, som är ett grundämne, ej kan ha kommit från vattnet eller zinken (ett grundämne), kan man antaga, att den leder sitt ursprung från saltsyran.» Påståendet att vätet ej kan ha kommit från vattnet är väl knappast välbetänkt efter närmast föregående försök, där väte framställes av vatten och järn. Men har man godtagit det, *måste* man antaga att vätet kommer från saltsyran. Jfr också s. 36, där kalcium anses reagera med vatten under bildning av CaO.

S. 22. Ferrosulfiden beskrives som mörkbrun.

S. 22. Gasformigt svavel säges ha mörkröd färg i stället för gul eller ljusbrun. Uppgiften måtte bero på förväxling med det på väggarna nedrinnande svavlet.

S. 23. Kuprosulfiden påstås ge ett rödbrunt pulver. Att detta icke är ett tryckfel, framgår av att författaren anger, att man också kan framställa en svart sulfid.

S. 42. Vid neutralisation av natriumhydroxid med saltsyra röres om med en glasstav, och med denna fuktas lackmuspappersbitar. »Efter varje prövning sköljes glasstaven med vatten.» Något skäl för denna rengöring är svårt att finna.

S. 52. »Om vid sammanförande av olika slag av joner två (eller flera) av dessa kunna giva upphov till en svårlöslig förening, går reaktionen alltid så, att denna förening bildas (Svårlöslighetslagen).» I denna form är lagen direkt missvisande. Om ordet olöslig användes, får man ju åtminstone ett gränsfall, där lagen gäller. Vill man undvika att tala om olösliga ämnen, får man i stället modifiera påståendet t. ex. genom att i ovanstående formulering utbyta »alltid» mot »om lösningarna äro tillräckligt koncentrerade». Motsvarande gäller om flyktighetslagen. Däremot har förf. vid formulerandet av en lag om bildandet av en svagt dissocierad förening använt termen odissocierad och då strukit det kategoriska alltid, vilket i detta fall försvarat sin plats.

S. 55. Om en lösning av koldioxid i vatten säges: »Uppvärmes en dylik eller försättes den med en annan syra, bortgår koldioxid.» Den senare delen av påståendet fordrar motivering eller exempel.

S. 58. »Med undantag av natrium- och kalciumfosfat äro de flesta fosfater svårlösliga i vatten.» Bör väl vara kaliumfosfat och trimetallfosfater.

Något som genast faller i ögonen vid läsningen av denna bok är den ålderdomliga prägel, som nomenklaturen har. Koppar-sulfur och järnoxidul äro ju gängse namn men kunde väl kompletterats med de nyare benämningarna. Däremot äro väl natron och kali, kalkhydrat, natronhydrat och kalihydrat olämpliga att upptaga i en elementär lärobok. Namnet natron som namn på hydroxiden i st. f. på oxiden gör dessutom termen natronhydrat ologisk.

Den genomgående användningen av gasutvecklingsflaskor enl. Berzelius verkar också omodern liksom anförandet av oxidformler icke blott för silikater utan även för salpeter m. fl. salter.

E. Löwenhamn.

Gösta Angel, *Elektrokemi* (grunderna av den teoretiska elektrokemien och dess viktigaste tekniska tillämpningar). Svenska Bokförlaget, Stockholm 1930, 234 sid., 66 ill. Kr. 8:75.

Arbetet innehåller en teoretisk del (92 sid.), en teknisk del (124 sid.), 16 tabeller över med ämnet samhörande storheter, litteraturhänvisning och utförligt register. Den teoretiska delen är välskriven och klar, så ingående, som det begränsade utrymmet medgiver. Några påpekanden må likväl göras.

På sid. 16 säger förf., att grundämnenas atomkärnor omkretsas av lika många elektroner som de kärnan uppbyggande väte-kärnorna. Redan för det andra grundämnet, helium, är detta oriktigt, ännu mycket mer för de övriga.

På sid. 21 läses formeln $W = 860 \cdot E \cdot I$ kcal; bör vara $0{,}860\ EI$ kcal. Med användning härav beräknar förf. längre ned på samma sida i ex. 2 den fantastiska effektförlusten i en ledningstråd av 11 610 000 kcal/tim i stället för en tusendel därav.

På sid. 32 talas om klorsilvrets löslighetsprodukt såsom om något bekant. Men den läsare, som känner betydelsen av löslighetsprodukt, är icke i behov av de ovanförstående, elementärt förklarande orden om dissociationsteoriens betydelse för kemien.

På sid. 42 böra i den första av de kursiverade satserna orden »anjonens (resp. katjonens)» ändras till »katjonens (resp. anjonens)». Och i den andra kursiverade meningen på samma sida bör ordet »anjonerna» utbytas mot »katjonerna».

I tabell V, sid. 220 har U för väte blivit 10 ggr för liten.

Förf. har på ett par sidor berört frågan om den klassiska dissociationsteoriens brister, och i ett arbete av denna syftning och detta omfång kan det nog tills vidare anses väl motiverat att icke ägna större utrymme åt de nyare strömningarna inom lösningsteorien. Däremot tror jag, att förf. hade gjort sin bok ännu mer

värdefull för den avsedda läsekretsen — praktiska tekniker och elever vid tekniska skolor - genom att upptaga ett litet antal räkneexempel, gärna lösta i facit, men icke i texten. Ett på egen hand riktigt löst problem visar läsaren, att han rätt uppfattat det lästa och uppmuntrar till fortsatta studier.

Den tekniska delen undandrar sig recis bedömande ur saklig synpunkt. Den är liksom den övriga delen av arbetet välskriven och synes vara fullständig. Den är också mycket väl illustrerad. För läraren i kemi vid vara gymnasier bör särskilt denna del vara värdefull. Även för lärjungebiblioteken är arbetet synnerligen väl lämpat.

G. Starck.

Iwan Bolin: *Det levande livets kemi*, 2 delar, tillsammans 312 sid., Bokförlaget Natur och Kultur, Stockholm 1931. Varje del häft. kr. 2: 25, inb. kr. 3: —.

Iwan Bolin har med dessa två nya volymer fullständigat sin populära serie »Kemien i det dagliga livet». Kanske just de nu behandlade kapitlen ur publik synpunkt äro de tacksammaste att popularisera. Vid popularisering av ett ämne möter man ofta svarigheter att halla fast vid den vetenskapliga exaktheten. Att göra en lättläst och innehallsrik framställning av ett komplicerat ämne kräver alltid approximationer och det är givet, att ju mer man är hemmastadd — helst genom sysselsättning — med sitt ämne, ju säkrare sker approximationen. Trots att Iwan Bolin näppeligen kan vara fackman på ett så stort område som »det levande livets kemi», så har han gjort sina approximationer med säkerhet. Biokemien och fysiologien äro ännu langt ifrån exakta vetenskaper i vissa stycken och dess fakta kunna lätt bli förvanskade. I stort sett äro emellertid de i dessa volymer meddelade uppgifterna riktigt återgivna, även om här och var förekomma en del missuppfattningar vid tolkningen från författarens källskrifter.

Rätt ofta möter man i dessa böcker en tendens till idéflykt - vartill man nog ofta frestas vid populära framställningar — som saknar motsvarighet i form av vetenskapligt erkända fakta. Så t. ex. anföres i en förövrigt utmärkt och modern översikt av sockersjukan den nyheten för läkaren, att sockret, som går genom njurarna till urinen, »naturligtvis är en påfrestning för njurarna». Det är sällan, man vid sockersjuka ser njurskador eller andra tecken på en påfrestning, och om så är, ha nog skadorna andra orsaker. Vidare omtalas på ett senare ställe, att blodkroppsmembranen bestå »av ett kolloidalt skum av framförallt lipoider».

Ordet »skum» ger en vilseledande uppfattning av membranets fysikaliska beskaffenhet. Liknande vändningar finnas på flera ställen och göra kanske ett störande intryck på den kritiska läsaren, men detta till trots fängslas man av den lediga framställningen av de ytterst intressanta kapitel, som det levande livets kemi bär inom sig.

Här finnas rubriker i rik växling: Äggviteämnena, cellernas byggnadsmaterial , Den kemiska sammansättningen av en del i människokroppen förekommande vävnader och organ» etc. Under den sistnämnda titeln finnes f. ö. en god skiss av de sista decenniernas uppfattning av de kemiska processerna som åtfölja muskelarbetet. I ett längre kapitel betitlat Några fysikaliskt-kemiska lagar» söker författaren klarlägga några av de fysikaliskt-kemiska processer, till vilka man numera så gärna vill återföra livsföreteelserna. I detta kapitel lyckas författaren få in förvånansvärt mycket, här talas utförligt om t. ex. »osmos» och »kolloider», om »ytspänning och adsorption» m. m. Till och med de moderna åsikterna om oxidationsprocesserna i kroppen finnas refererade. I ett stycke om vätejonkoncentrationens stora betydelse för biologiska funktioner, säger författaren bl. a. »för hög eller för låg vätejonkoncentration åstadkommer maglidande». Ja, vilket som är det primära, maglidandet eller den förhandenvarande vätejonkonsentrationen, det vet man väl knappt ens på initierat läkarehåll. Livets kemiska reglerare» d. v. s. enzymer, vitaminer och hormoner, vilka just i nuvarande tid äro föremål för en omfattande forskning och även för allmänt intresse, ha behandlats i ett väl skrivet kapitel. De sista sidorna i första delen äro ägnade en mängd näringsfysiologiska spörsmål. Här talas om kalorivärden, om näringsvärden och om födoämnenas framställning m. m., allt saker, som kunna påräkna det största allmänna intresse.

I direkt anslutning härtill börjar andra delen med att redogöra för matsmältningen och ämnesomsättningen. Födoämnenas beredning ur fysikalisk och kemisk synpunkt är både roande och lärorikt genomgånget. Över några kapitel om njutningsmedel och växtkemi kommer författaren till behandlingen av två stora industriella områden, nämligen färgämnes- och läkemedelsframställningen. Författaren har tydligen med titeln »Det levande livets kemi» icke blott menat det biologiska livets kemi, utan en del av »vardagslivets» = »det levande livets kemi». Nå, intet ont i det! Läkemedelskapitlet, vilket innehåller en del välmenta råd, slutar med en beskrivning på ett husapotek, som i vissa punkter möjligen kan diskuteras. I det sista kapitlet diskuterar författaren

spörsmålet »Vari ligger skillnaden mellan levande och död materia?» Diskussionen föres övervägande i form av redogörelser för modell- eller analogiexperiment.

För att vidare kunna nära det intresse, som böckerna säkerligen väcka hos den därför avsedda läsekretsen, finnes hänvisning till originallitteraturen, och ett fullständigt register medger deras begagnande som en populär uppslagsbok.

Bortsett från den ur strängt vetenskaplig synpunkt motiverade kritiken, varav en del anförts ovan, måste man som slutomdöme säga, att böckerna fylla ett behov och att de varmt kunna rekommenderas sasom bade nöjes- och nyttoläsning för en större allmänhet.

Torsten Teorell.

Gradualavhandlingar.[1]

Erik Hallén, *Über die elektrischen Schwingungen in drahtförmigen Leitern*, Uppsala universitets årsskrift 1930, Matematik och naturvetenskap I; tryckt i Lund 1930, 102 sid. Disp. i Uppsala den 16 maj 1930. Opponenter: docent I. Waller och fil. kand. H. Alfvén.

Den klassiska vägen att bestämma en metallisk ledares egensvängningar är att lösa de utom och inom ledaren för det elektromagnetiska fältet giltiga partiella differentialekvationerna genom separation. Metoden är dock begränsad till några få enkla former hos ledaren, ej alls svarande mot praktiskt behov. Att problemet för allmänna ledarformer teoretiskt sett kan lösas med integralekvationer, härledda ur de elektromagnetiska potentialerna, är visat av Poincaré. Ur på liknande sätt härledda integrodifferentialekvationer ha Pocklington, Rayleigh och Oseen vunnit approximativa resultat, som närmare ansluta sig till praktiska fall.

Förf. härleder för egensvängningarna hos den allmänt formade trådformiga antennen en integralekvation av formen:

$$I(x) - \frac{1}{A}\left\{I(x)\,g(x) + \int_0^l \frac{I(y) - I(x)}{|\,y - x\,|}\,dy + \int_0^l I(y)\,k(x, y, p)\,dy\right\} = C \sin px$$

med egenvärdevillkoret $I(l) = 0$, i vilken ekvation g och k äro kända, av trådformen beroende funktioner och p de sökta egenvärdena. (För i sig själv sluten tråd modifieras ekvationen något).

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

Med »trådformig» förstås här att termer av samma storhetsordning som förhållandet mellan kvadraten på trådtjockleken och kvadraten på trådlängden försummats bredvid 1 — endast därigenom kommer man i allmänhet till ett endimensionalt problem — medan däremot termer av storhetsordningen $1 : A$, där A är logaritmen för nämnda förhållande, ändå betraktas som väsentliga, vilket motsvarar praktiska fall. För tunna trådar är dock även $1 : A$ tämligen litet. Ekvationen tillåter då lösning genom utveckling efter potenser av $1 : A$. Härigenom har författaren kunnat härleda jämförelsevis enkla slutna approximativa uttryck för våglängd, dekrement och strömform hos den godtyckligt formade antennen. Dessa formler innehålla bl. a. alla förut för speciella fall på olika vägar beräknade (Abraham, Rayleigh, Oseen), därtill utvidgade genom hänsyn till motståndet. Förf. har utfört en del numeriska nyberäkningar bl. a. för den klassiska Hertzska oscillatorn i form av en ring avbruten av en liten öppning. I ett par kurvor göras jämförelser mellan författarens formler och experimentella undersökningar.

För högfrekvenstekniken viktiga ledarformer, där den öppna antennens teori icke är användbar, äro trådspolar i vilka lindningsvarven komma på ett avstånd från varandra av trådtjockleksens litenhetsordning. I senare delen av avhandlingen behandlas egensvängningar hos enlagriga spolar. I princip samma integralekvation som förut uppställes, blott att gränsövergången till oändligt tunn tråd här ger en ekvation av annat slag: »integralekvation av första slaget» med viss singularitet i kärnan. Med en metod av Carleman överföres den emellertid till en homogen Fredholmsk integralekvation, vars egenvärden äro de sökta frekvenserna. För specialfallet låg spole (som är det enda förut på annan väg exakt behandlade, nämligen av Lenz) reducerar sig den Fredholmska nämnaren till en blott tvåledig determinant, och metoden ger därför snabbt i sluten form den enkla funktionalekvationen för egenvärdena. Men metodens framsteg ligger framför allt i att den tillåter allmännare spolformer. Författaren utför numeriskt frekvensbestämningen för ett gentemot Lenz utvidgat dimensionsområde. Resultaten åskådliggöras av kurvor och jämföras med experimentella resultat.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

428) *Två koncentriska sfärer äro givna. Man betraktar en variabel sfär O, som har sin medelpunkt på en fix, gemensam diameter till de givna, råkar båda dessa och delar området mellan dem mitt itu. Visa, att sfären O ständigt (går genom) innehåller en viss cirkel.* X.

429) *Sammansättningen hos en blandning av två vätskor A och B (spec. vikt a och b resp.; $a > b$) kan angivas antingen medelst antalet volymprocent (v_A), som utgöres av A, eller medelst antalet viktprocent (m_A), som utgöres av A. Visa, att $m_A - v_A$ är maximum, då $m_A = v_B$ och $v_A = m_B$.* X.

430) *O är centrum, F ena brännpunkten och l ena asymptoten till en hyperbel. P är en punkt på hyperbeln; FP skär l i Q. Konstruera en sträcka, vars längd är det gränsvärde, till vilket längden av PQ närmar sig, då P längs en av de till l hörande kurvdelarna försvinner till oändligheten.* X.

431) *T är ytan av en triangel med sidorna a, b och c. T_0 är ytan av den triangel, som har sina hörn i den inskrivna cirkelns kontaktpunkter. T_a, T_b och T_c ha motsvarande betydelse för de vid a, b och c vidskrivna cirklarna. Bevisa, att $T_a + T_b + T_c - T_0 = 2\,T$.* X.

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.[2]

432) Visa, att en cirkel, vars medelpunkt är inflexionspunkten för kurvan $y = x^3 - 2x$ och vars periferi passerar såväl genom denna kurvas maximipunkt som genom dess minimipunkt, tangerar kurvan i två andra punkter. Bestäm dessa punkters koordinater.

Svar: $x = \pm \sqrt{15} : 3$; $y = \mp \sqrt{15} : 9$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 432—448 äro insända av B. E. N.

433) Kurvan $y = a\,(3\,x^4 + 4\,x^3 - 12\,x^2)$ har maximum i A och minimum i såväl B som C (B lägre än C). Bestäm a så, att linjerna AB och BC bli lika långa.

Svar: $a = 1 : \sqrt{59}$.

434) Bestäm a, b och c så, att maximi- och minimipunkterna på kurvan $y = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x$ komma att falla, den ena i maximipunkten, den andra i en av minimipunkterna på kurvan $y = x^4 - 2\,x^2$.

Svar: $a = \pm 2$, $b = -3$, $c = 0$.

435) Bestäm a så, att de tre kurvorna $y = x^4 - 2\,x^2$, $y = 2\,x^3 - -3\,x^2$ och $y = a\,x^2$ för ett värde på x få parallella, icke sammanfallande tangenter, och visa, att avståndet mellan två och två av dessa tangenter är lika.

Svar: $a = -1{,}5$.

436) Konstruera kurvan

$$y = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)^2}{x^4\,(x^2 - 2)}.$$

437) Konstruera kurvan

$$y = \frac{8\,(x^2 - 1)^2}{x^6 + 8}.$$

438) Bestäm a i ekv. $y = \dfrac{x^3 - 5\,x}{x^2 + a}$ så, att funktionskurvan får en enda asymptot, vilken skall vara mittpunktsnormal till sträckan mellan maximi- och minimipunkterna.

Svar: $a = 3$.

439) Konstruera kurvan

$$y = \frac{(8\,x^2 - 5)(x^2 - 4)^2}{9\,x^4}.$$

440) Lös systemet:

$$\frac{tg\,x - tg\,y}{1 - tg\,x\,.\,tg\,y} = 1;\ \cos(x - 45°)\,.\,\cos(y + 45°) = \tfrac{1}{2}.$$

Svar:

x	45°	45°	225°	225°	−15°	105°	165°	−75°	$+ m\,.\,360°$
y	15°	−105°	75°	−165°	−45°	−45°	135°	135°	$+ n\,.\,360°$

441) Kurvorna $y = x^3 - 3\,x$ och $y = 4\,x^2 - 6$ äro givna. En linje $x = a$ skär kurvorna i A och B. Bestäm största och minsta längden av AB, då $-1 \leqq a \leqq 0$.

Svar: max. $= 6\,\frac{14}{27}$ för $x = -\frac{1}{3}$; min. $= 4$ för $x = -1$.

442) Till hyperbeln $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{10} = 1$ läggas två parallella tangenter och från brännpunkterna normaler mot dessa. Bestäm maximum av den så bildade rektangelns yta.

Svar: 32 ytenheter.

443) Triangeln ABC har $AB = AC$; A ligger i punkten $(0; -4)$, B och C på kurvan $y = (x^4 - 8x^2) : 4$. Sidan BC är parallell med x-axeln och mindre än 4 enheter. Sök max. av triangeln ABC:s yta.

Svar: $\frac{128\sqrt{5}}{125}$ ytenheter.

444) I ena ändpunkten av var sin av två konjugatdiametrar till en ellips lägges en normal. Visa, att de trianglar dessa normaler bilda med ellipsens axlar äro lika stora.

445) En punkt på den i andra kvadranten belägna delen av kurvan $y = \frac{x^3}{15} - 2x$ sammanbindes med origo. Bestäm max. av denna linjes längd.

Svar: $\sqrt{30}$ (för $x = -\sqrt{15}$).

446) Kurvorna $y = \frac{4 - 4x - x^2}{4}$ och $y = \frac{x^2 - 12}{4}$ skära varandra i två punkter. Mellan dem lägges, parallellt med y-axeln, en linje, som skär kurvorna i A och B. Bestäm max. av linjen AB.

Svar: 4,5 (för $x = -1$).

447) Kurvan $y = \frac{(x^2 - 4)^2 (x^2 - 1)}{4}$ är given. Sök excentriciteten hos en ellips, som går genom kurvans alla maxima och minima.

Svar: $\sqrt{10} : 5$.

448) I triangeln ABC drages en med BC parallell transversal, som skär AB i D och AC i E; DC och EB råkas i F. Visa, att transversalen delar sidorna enligt gyllene snittet, då ytan av triangeln DEF är maximum.

Lösningar till uppg. 395—398.[1]

395) *En gammal kortkonst lyder: Tag en blandad kortlek, lägg ned första kortet och bilda en hög genom att, utgående från det första kortets valör (äss = 1; kung = 13), räkna till 13. (Är t. ex.*

[1] Tillägg till föreg. häfte: Signaturen Ed. S. hade insänt lösningar till uppg. 375 och 376.

det första kortet en knekt, räknar man 11, 12, 13, så att högen kommer att innehålla 3 kort). Med de återstående korten bildas på samma sätt nya högar, tills återstoden ej räcker till en fullständig hög. Är nu högarnas antal n och antalet återstående kort p, så blir summan av valörerna på de understa korten i högarna

$$S = 13(n-4) + n + p.$$

Bevisa detta. *Bx*

Om a_i är valören på det understa kortet i den i:te högen och m_i är antalet kort i denna hög, har man tydligen $a_i + m_i = 14$. Således blir $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} m_i = 14\,n$. Vidare är $\sum_{i=1}^{n} m_i + p = 52$. Man får då slutligen

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 14\,n - (52 - p) = 13(n-4) + n + p\,.$$

B—r. Även löst av *Ed. S.*

396) *Cirkeln (K) ligger helt och hållet inom cirkeln (L). Tangenten i en godtycklig punkt C på (K) skär (L) i A och B. Finnes någon punkt i planet, varifrån CA och CB alltid synas under lika vinklar?* *X.*

En punkt P med den sökta egenskapen bildar med A och B en triangel PAB, i vilken PC är bissektris. Orten för P blir då den harmoniska cirkel med centrum O, som skär AB i C. Enär $\frac{OA - OC}{OC - OB} = \frac{OA + OC}{OC + OB}$, fås genom korresponderande addition och subtraktion $\frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OB}$. Kvadraten på tangenten från O till L är $= OA \cdot OB = OC^2$. Således ligger O på radikalaxeln till K och L, och orten för P skär dessa cirklar under räta vinklar.

Om nu tangenten till K varierar, erhålles ett knippe av ortcirklar, ortogonala mot K och L och även mot alla cirklar, som ha gemensam radikalaxel med dessa.

Alla ortciklar måste gå genom två fixa punkter S och S_1 på centrallinjen till K och L. Dessa punkter, som just äro de sökta, äro cirklar med radien noll, vilka ha gemensam radikalaxel med K och L.

Om K och L äro koncentriska, blir deras gemensamma medelpunkt den enda lösningen; om de tangera varandra, blir denna deras tangeringspunkt. Hade de antagits skära varandra, hade man ej fått någon lösning, men om de fallit helt utom varandra, hade man åter fått två lösningar. *B—r.*

397) *A är toppen av en i en cirkel inskriven likbent triangel ABC. Parallellt med AB drages en linje, som skär AC i E och den mindre av de bågar, vari periferin delas av AC i F. Sök maximum av EF.* *C. H.*

Vinkeln AEF är $= \sphericalangle A$ och avståndet från F till AC således $= EF \cdot \sin A$. Detta avstånd skall då även bli maximum, d. v. s. F skall ligga i mittpunkten G på den mindre bågen AC, såvida en linie från $G \parallel AB$ träffar AC. Träffar den däremot AC:s förlängning, blir en linie CF från $C \parallel AB$ den största av dem, som träffa själva AC.

Om cirkelns radie är r, blir i förra fallet avståndet från G till $AC = r\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right)$ och $EG = \frac{r\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right)}{\sin A}$. I senare fallet blir $\sphericalangle OCF = \frac{3A}{2}$ (om O är cirkelns medelpunkt) och alltså $CF = 2r\cos\frac{3A}{2}$. De båda uttrycken få samma värde för $A = 36°$, vilket värde bildar gräns mellan de båda fallen.

$B - r$. Även löst av *Ed. S.*

398) *Att upprita en triangel, då man känner basen, höjden mot basen samt skillnaden mellan basvinklarna.* *A. H. P.*

Uppgiften löses lämpligen genom »omläggning» eller »spegling». Antag den sökta triangeln vara ABC, där BC, $B - C$ och höjden från A äro givna. Låt A_1 vara A:s spegelbild med avseende på BC:s mittpunktsnormal och B_1 vara B:s spegelbild med avseende på AA_1, så blir AB_1A_1C en parallellogram, i vilken $\sphericalangle CAB_1 = 180° - (B - C)$. Punkten A bestämmes sålunda genom att över CB_1 uppslå ett cirkelsegment innehållande supplementet till $B - C$, varefter triangeln kan fullbordas.

Inga lösn. inkomna.

Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna V. T. 1931.

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

(1905 års läroverksstadga).

1. De båda kateterna i en rätvinklig triangel förhålla sig till varandra som 3 till 4. I vilket förhållande delas hypotenusan av den i triangeln inskrivna cirkeln?

2. I en triangel är en vinkel 120°. Bissektrisen till denna vinkel delar motstående sida i tvenne delar med längderna 3 och 4 dm. Beräkna triangelns övriga sidor och vinklar.

3. Fyra tal bilda geometrisk serie. Minskas de med respektive 2, 4, 8 och 15, så erhållas fyra tal i aritmetisk serie. Vilka äro talen?

4. I en cirkel är inskriven en fyrhörning, vars sidor äro i ordning 1, 2, 3 och 4 dm. Hur stor är cirkelns radie?

5. Bestäm alla värden på x och y, som satisfiera ekvationssystemet

$$2x + 3y + 1 = 0, \qquad 8x^3 + 27y^3 + 37 = 0.$$

6. En pyramid, som har höjden 14,20 m, delas genom två med basen parallella plan i tre delar, vilkas volymer äro sinsemellan lika stora. Beräkna planens avstånd från pyramidens spets.

7. En person insatte vid början av år 1910 i en penninginrättning 10 000 kronor. Under de följande 20 åren insatte han ytterligare i samma inrättning vid varje års början ett visst belopp k kronor så avpassat, att han från och med 1930 vid varje års slut under 20 år kunde från inrättningen uppbära 3 000 kronor. Hur stort måste k vara, om penningarna förräntas efter $4\frac{1}{2}$ % årlig ränta på ränta?

8. Två cirklar tangera varandra utantill i punkten A. Man tager tvenne punkter B och C, en på vardera cirkelperiferien, och så, att vinkeln BAC blir rät. Hur skola B och C väljas för att triangeln BAC ska få så stor yta som möjligt, och hur stor blir denna, om cirklarnas radier äro R och r?

Resultat: **1.** 2 : 3. **2.** Sidorna 7 dm; $28 : \sqrt{37} = 4{,}603$ dm; $21 : \sqrt{37} = 3{,}452$ dm. Vinklarna 120°; 34°,72; 25°,28. **3.** 8, 12, 18, 27. **4.** $\sqrt{2310} : 24 = 2{,}003$ dm. **5.** $x_1 = -2$, $y_1 = 1$; $x_2 = 1{,}5$, $y_2 = -1\frac{1}{8}$. **6.** $14{,}20 : \sqrt[3]{3} = 9{,}848$ m; $14{,}20 : \sqrt[3]{1{,}5} = 12{,}41$ m. **7.** 475(,2) kr. **8.** *B* och *C* ligga i ändpunkterna av två åt samma håll, vinkelrätt mot centrallinjen dragna radier. Triangelytan är då *Rr*.

(1928 års läroverksstadga).

1. Beräkna med logaritmer

$$\sqrt[5]{2{,}358 + \sqrt[3]{0{,}7}}.$$

2. I en cirkel, vars radie är 1 dm, är inskriven en triangel, vars vinklar förhålla sig som 2 : 3 : 4. Hur stor är triangelns yta?

3. Beräkna vinklarna i en likbent triangel, där höjden, basen och sidan (i nu nämnd ordning) bilda aritmetisk serie.

Uppgifterna 4, 5, 6, 7 och 8 utgjordes av uppg. 1, 2, 3, 4 och 5 i ovanstående skrivning enligt 1905 års stadga.

Resultat: **1.** 1,266. **2.** 1,096 dm². **3.** 61°,93; 61°,93; 56°,14.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

1. En person erbjuder sig att för en gård betala 6000 kr. kontant och 2500 kr. vid vart och ett av de närmaste 10 årens slut. En annan bjuder 9000 kr. kontant och 3500 kr. vid vart och ett av de närmaste 5 årens slut. Säljaren kan beräkna 6% ränta. Vilket anbud är bäst och hur mycket är det ena bättre än det andra?

2. Hur stor är excentriciteten hos en hyperbel, om en triangel med vinklarna 90°, 60°, 30° har den räta vinkelns spets i en punkt på kurvan och de båda andra spetsarna i brännpunkterna?

3. I en fyrhörning *ABCD* är *AB* 159 m, *BC* 135 m, *CD* 66,5 m, vinkeln *B* 98°, vinkeln *C* 163°30′. Beräkna längden av *AD*.

4. En cirkel med medelpunkten *M* och radien *r* är given. En liksidig triangel har två av sina hörn *A* och *B* på cirkelns periferi. Hur stor skall vinkeln *AMB* vara för att avståndet från triangelns tredje hörn till *M* skall bli så stort som möjligt?

5. I en regelbunden fyrsidig pyramid ha alla sidoytorna tillsammans nio gånger så stor yta som basytan. Genom ett med basen parallellt plan avskäres en toppyramid så, att totala ytan hos den återstående, stympade pyramiden är 0,8 av den ursprungliga pyramidens totala yta. Hur stor är den stympade pyramidens volym jämförd med den ursprungliga pyramidens volym?

6. x och y äro rätvinkliga koordinater. Om konstanten a väljes lämpligt, så framställer ekvationen

$$9x^2 - 3xy + ay^2 + 15x - 16y - 14 = 0$$

två räta linjer. Bestäm detta värde på a samt de båda linjernas ekvationer.

7. Bestäm alla vinklar x, som satisfiera ekvationen

$$\sin 3x \cdot \sin 4x = \cos 4x \cdot \cos 5x.$$

8. En rätvinklig triangel är given. Sök orten för en punkt P så beskaffad, att fotpunkterna till de tre perpendiklarna från P mot triangelns sidor ligga i rät linje.

9. Tre koncentriska cirklar äro givna. Att draga en rät linje så, att det stycke av den, som begränsas av den största och den minsta cirkeln, delas i ett givet förhållande av den mellersta cirkeln.

Resultat: **1.** Det första anbudet är omkring 660 kr. fördelaktigare än det andra. **2.** $\sqrt{3} + 1 = 2{,}732$. **3.** 260,8 m. Löses enklast genom att utdraga AB och DC till E, beräkna $BE = 38{,}77$ m och $CE = 135{,}2$ m och därefter AD enl. cos.-teor. **4.** Vinkeln $AMB = 120°$. Låt C vara triangelns tredje hörn. Fäll från M en normal mot CA (el. dess förlängning); CM har tydligen max., då normalen har max., d. v. s., då CA tangerar cirkeln. **5.** 7 : 8. **6.** $a = -2$. Linjernas ekv. $3x - 2y - 2 = 0$ och $3x + y + 7 = 0$. **7.** $11°{,}25 + n \cdot 22°{,}5$; $90° + n \cdot 180°$. **8.** Orten är den kring triangeln omskrivna cirkeln. Rent geometrisk metod kan användas. Låt triangelns kateter vara OA och OB, normalernas fotpunkter på OA, OB och AB resp. Q, R och S. Läggas cirklarna genom P, R, B och S samt genom P, Q, S och A, fås genast $\angle SBP = \angle PRS = \angle SQA = \angle SPA$, varav $APB = 90°$. **9.** Löses genom vridning. Se t. ex. kap. Sammansatta transformationer i Cassels Geometriska anteckningar, Norstedt & Söners förlag.

Uppgifter i fysik.

(1905 års läroverksstadga).

1. En rak, homogen, jämntjock stång av 8 dm längd och 1 kg vikt stöder med sin nedre ände A mot ett glatt, horisontellt plan, medan den högre upp i en punkt B vilar mot en glatt egg, som bildar en mot stången vinkelrät, horisontell linje, belägen 4 dm över det horisontella planet. Avståndet från punkten B:s projektion C i horisontalplanet till punkten A är 3 dm. Stången fasthålles i denna ställning med en horisontell tråd, spänd mellan stångens nedre ände A och punkten C. Huru stor är spänningen i denna tråd?

2. Jorden antages vara en homogen sfär med 6370 km radie. En kropp på jordytan påverkas dels av jordens attraktion, som är riktad längs jordradien, dels av centrifugalkraften. Dessa båda krafter ge en resultant, som är den på kroppen verkande tyngdkraften och vars riktning med en *mycket liten* vinkel v avviker från jordradiens. Sök vinkeln v, uttryckt i minuter, vid 60° latitud! Accelerationen vid fritt fall är 982 cm/sek² vid 60° latitud. Stjärndygnets längd = 86 164 sek.

3. En likarmad vågbalans, som vid sin ena arm uppbär en metallkula och vid den andra en glaskula med radierna resp. 0,5 och 2,2 cm, befinner sig i jämvikt i ett rum, fyllt med torr luft, där temperaturen är 16° C och trycket 718 mm. Vågbalansen placeras därefter i lufttomt rum. Huru mycket skall då metallkulans vikt förändras, för att vågbalansen i detta senare fall skall vara i jämvikt? En liter torr luft väger vid 0° C och 760 mm 1,293 gr; luftens utvidgningskoefficient är 1/273.

4. I den optiska medelpunkten till en tjock, bikonvex glaslins finns en liten luftblåsa. Linsens båda radier äro 3 cm, tjockleken är 1,2 cm och glasets brytningsexponent 1,5. En person ser in i linsen utmed den optiska huvudaxeln. Var förlägger han bilden av luftblåsan?

5. Huvudsnittet i ett rakt, tresidigt glasprisma ($n = 1{,}61$) utgöres av triangeln ABC, där vinkeln A är prismats brytande vinkel. Om denna vinkel överstiger ett visst gränsvärde, kan ingen av de ljusstrålar, som i huvudsnittet utifrån infalla mot sidan AB, gå igenom sidan AC, vilken infallsvinkel de än ha, då de råka AB, d. v. s. de strålar, som träffa AC, totalreflekteras vid denna sida. Sök detta gränsvärde för den brytande vinkeln!

6. Ett ackumalatorbatteri innehåller 12 lika element. Varje element har en elektromotorisk kraft av 2 volt och ett inre motstånd av 0,02 ohm. Elementen äro kopplade i tre parallella grupper med vardera fyra element i serie. I en av grupperna blev ett element obrukbart, varför det frånkopplades och ersattes med en ledning med 2 ohms motstånd. Sök strömstyrkans riktning och storlek i de tre grupperna, då från batteriet uttogs en strömstyrka av 10 ampère!

7. Det inre motståndet hos en ackumulator bestämmes på följande sätt. Ackumulatorns positiva pol förbindes med den ena ändpunkten A till en lång, jämntjock nysilvertråd AB. Den negativa polen anslutes till AB medelst en glidkontakt C, som ligger mellan A och B. Från punkten A utgår en grenledning, som innehåller från A räknat: ett element med konstant elektromotorisk kraft, som är mindre än ackumulatorns, och en galvanometer, vars från elementet vända klämskruv är förbunden med en andra glidkontakt D, som ligger mellan A och C. Ackumulatorn och elementet vända de positiva polerna mot varandra. Galvanometern är strömlös såväl då AC är 90 cm och AD 48,4 cm som då AC är 60 cm och AD 33,4 cm. Beräkna ackumulatorns inre motstånd! Tråden AB har ett motstånd av 0,05 ohm per cm. Det sammanlagda motståndet hos de trådar, som förbinda ackumulatorns poler med A och C, är 0,04 ohm.

8. Generator för likriktad ström, dess konstruktion och verkningssätt.

Resultat: **1.** 0,384 kgf. **2.** 5',1. Beteckna den sökta vinkeln med v och centrifugalacc. vid 60° latitud med c, så erhålles ur sinusteor. $\sin v : c = \sin 60° : 982$. **3.** 50,86 mg. **4.** $^3/_7$ cm från närmaste yta. **5.** 76°,8. **6.** 5,38; 5,38 och $-0{,}76$ A. **7.** 0,3 Ω.

(1928 års läroverksstadga).

Uppgifterna 1 — 6 utgjordes av uppg. 1 — 6 i ovanstående skrivning enligt 1905 års stadga.

7. I ett urladdningsrör utslungas från katoden ett knippe katodstrålar. Dessa träffa en i deras väg ställd aluminiumplatta. Strålknippet utgöres av partiklar, vilka alla ha massan 9×10^{-28} gr och hastigheten 3×10^9 cm/sek. Då partiklarna slå mot plattan, avge de till denna hela sin rörelseenergi, som helt och hållet förvandlas i värme, varigenom plattan uppvärmes.

Sök temperaturstegringen hos plattan, då 10^{16} stycken partiklar träffat plattan! Under den korta tid, försöket varar, lider plattan ingen värmeförlust. Plattan väger 0,2 gr, dess specifika värme är 0,21. En gramkalori är $4{,}2 \times 10^7$ erg.

8. En ström av 1,46 ampère ledes genom en cirkelformad strömbana med 12 cm radie. Strömbanans plan står vertikalt och är vinkelrätt mot det magnetiska meridianplanet. I cirkelns medelpunkt är en liten kompassnål uppställd, fritt rörlig omkring sin vertikala axel. Om kompassnålen bringas att svänga, gör den 15,9 svängningar i minuten, när strömmen går i den ena riktningen genom strömbanan, och 9,3 svängningar i minuten, då strömmen går i motsatt riktning. Nålens nordpol är vid jämvikt i båda fallen riktad åt norr. Beräkna jordmagnetismens horisontella komposant, uttryckt i C. G. S. enheter!

Resultat: 7. 22°,9. 8. 0,157 C. G. S.-enheter.

Realskolexamen V. T. 1931.

Provräkning.

1. Lös ekvationen

$$\frac{3x-2}{x+3} - \frac{1}{3x-9} = \frac{3(x-1)^2 - 46}{x^2 - 9}.$$

2. En sorts så kallade japanska pärlhalsband kunna köpas från importören efter 18 kr. per dussin, varvid 5 % kassarabatt lämnas vid kontant betalning. Huru många procent vinst får en återförsäljare, som säljer halsbanden efter 4 kronor per styck?

3. En person hade 1919 en årslön på 1 800 kr. Den 1 januari 1920 under då rådande dyrtid höjdes hans avlöning med 60 %. Från den 1 januari 1923 minskades sedan den efter 1 januari 1920 utgående avlöningen med 20 %. Huru många procent höjning av avlöningen under år 1919 åtnjöt nämnda person efter minskningen den 1 januari 1923?

4. A. köper en 4 % obligation å nominellt 1 000 kr. till en viss kurs. Efter ett halvt år får han obligationen utlottad, och samtidigt erhåller han 6 månaders ränta å obligationen. Genom att inbegripa den erhållna kursvinsten i ränteavkastningen kan A. säga sig ha $26\,{}^2/_3$ % ränta på sina pengar under nämnda tidsperiod. Bestäm obligationens kurs.

5. En person betalar i en stad för närvarande 25 öre per kilowattimme (kWh) i avgift för elektrisk strömförbrukning. Emellertid finnes möjlighet för honom att i stället övergå till s. k. våningstaxa. Enligt denna betalar han en grundavgift per år, beräknad efter 20 öre per m^2 av våningens golvyta, samt dessutom 15 öre per kWh. Storleken av rummen i våningen är: salen 7,2 m $\times$ 4,5 m; vardagsrummet 5,4 m $\times$ 4,5 m; sovrummet 4,4 m $\times$ 3,5 m; barnkammaren 3,8 m $\times$ 3,5 m; hallen 3,2 m $\times$ 3,0 m; köket 3,5 m $\times$ 2,8 m. Ytan av övriga utrymmen är 15,2 m^2. Hur många kWh per år bör han förbruka, för att hans kostnader skola bliva lika stora enligt båda beräkningssätten?

6. En motorbåt, som förbrukar 4 liter bensin per mil vid normal gång på motorn, råkar ute i öppen sjö på en större motorbåt, som fått maskinskada. Denna tages på släp, varigenom den första motorbåtens hastighet nedsättes till $^1/_3$ av den, som båten förut hade. Om nu den bogserande båten vid mötet hade 8 mil kvar till sin bestämmelseort och ett förråd på 86 liter bensin, så skall man beräkna, hur lång sträcka den skadade båten kan få medfölja på släp, innan den måste släppas igen, för att den första båten skall kunna nå sitt mål med förbrukning av hela bensinförrådet. (Det förutsättes, att motorn under hela tiden förbrukar lika mycket bensin per timme).

7) I ett klot, vars yta är 50,24 cm^2, är en rät, cirkulär cylinder inskriven. Cylinderns höjd och basdiameter äro lika stora. Beräkna cylinderns volym. $\pi = 3{,}14$.

8. Förenkla så långt som möjligt uttrycket

$$\left(\frac{b^2}{a+b} + a - b\right) : \left(1 - \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\right)$$

samt beräkna därpå dess värde för $a = 3\sqrt{2}$, $b = \frac{1}{3}$.

Resultat: **1.** $x = 9$. **2.** 180,7 %. **3.** 28 %. **4.** 90 %. **5.** 240 kWh. **6.** 6,75 mil. **7.** $\pi \cdot \sqrt{32} = 17{,}8$ cm^3. **8.** $\frac{a(a+b)}{4b}$; $\frac{54+\sqrt{18}}{4} = 14{,}561$.

Sannolikhetsräkning på empirisk grundval.

Av EDVARD GÖRANSSON.

5. Samvariation.

Vid studiet av två statistiska serier finner man stundom att talen följas åt, så att en samvariation äger rum. Till närmare belysning härav anföras en del siffror från tabell 30 sid. 89 i tabellbilagan till Skolöverstyrelsens statistiska berättelse över det högre skolväsendet läsåret 1927/1928. Tabellen upptager antalet lärjungar i de högre skolorna år 1924 fördelade länsvis efter hemorter såväl för manlig som kvinnlig skolungdom. Därjämte angivas motsvarande promilletal i jämförelse med den manliga respektive kvinnliga befolkningen i de olika länen. I stort sett fortlöpa talen för manliga och kvinnliga lärjungar så, att en samvariation är omisskännlig. Tydligast framträder detta, om man ordnar länen efter stigande promilletal beträffande manliga lärjungar.

Stockholms stad intager en särställning. Antalet i högre skolor undervisade gossar, som hade hemort i Stockholm, var nästan lika stort som antalet flickor med hemort i Stockholm och tillhörande högre skolor. År 1924 var nämligen antalet gossar 6 054 och antalet flickor obetydligt större eller 6 097. Men på grund av det betydande överskottet av kvinnor i Stockholm blir relationen i förhållande till folkmängden den, att 39·9 ‰ av Stockholms manliga befolkning undervisades i de högre skolorna mot endast 25·1 ‰ av den kvinnliga.

Antal manliga och kvinnliga lärjungar i de högre skolorna år 1924 pro mille av manliga resp. kvinnliga befolkningen.

x = antal manliga lärjungar ‰ av den manliga befolkningen; y = antal kvinnliga lärjungar ‰ av den kvinnliga befolkningen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Län, i vilka lärjungarna ha sina hemorter. Länen äro ordnade efter storleken av x	Länens ordningsföljd:			Manliga resp. kvinnliga lärjungar ‰ av		$x - m_x$	$y - m_y$	$(x - m_x)^2$	$(y - m_y)^2$	$(x - m_x) \cdot (y - m_y)$
	den officiella	efter storleken av		manliga befolkningen x	kvinnliga befolkningen y					
		x	y							
Västerbottens län	23	1	1	5·0	3·6	— 5·3	— 4·5	28·09	20·25	23·85
Kronobergs »	6	2	2	6·4	5·2	— 3·9	— 2·9	15·21	8·41	11·31
Jämtlands »	22	3	3	7·3	5·5	— 3·0	— 2·7	9·00	7·29	8·10
Västernorrlands »	21	4	6	7·7	6·3	— 2·6	— 1·8	6·76	3·24	4·68
Kopparbergs »	19	5	4	7·8	5·6	— 2·5	— 2·6	6·25	6·76	6·50
Norrbottens »	24	6	14	8·3	7·6	— 2·0	— 0·5	4·00	0·25	1·00
Gotlands »	8	7	5	8·9	6·0	— 1·4	— 2·2	1·96	4·84	3·08
Kristianstads »	10	8	8	8·9	6·6	— 1·4	— 1·5	1·96	2·25	2·10
Gävleborgs »	20	9	7	9·0	6·5	— 1·3	— 1·7	1·69	2·89	2·21
Värmlands »	16	10	9	9·4	7·0	— 0·9	— 1·1	0·81	1·21	0·99

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Västmanlands län	18	11	10	9·5	7·0	— 0·8	— 1·1	0·64	1·21	0·88
Skaraborgs »	15	12	11	9·6	7·3	— 0·7	— 0·9	0·49	0·81	0·63
Kalmar »	7	13	12	9·7	7·4	— 0·6	— 0·7	0·36	0·49	0·42
Älvsborgs »	14	14	13	9·7	7·4	— 0·6	— 0·7	0·36	0·49	0·42
Örebro »	17	15	16	10·0	7·9	— 0·3	— 0·2	0·09	0·04	0·06
Södermanlands »	3	16	15	10·9	7·7	+ 0·6	— 0·4	0·36	0·16	— 0·24
Jönköpings »	5	17	20	11·0	9·7	+ 0·7	+ 1·5	0·49	2·25	1·05
Hallands »	12	18	17	11·1	8·4	+ 0·8	+ 0·3	0·64	0·09	0·24
Östergötlands »	4	19	18	11·6	9·1	+ 1·3	+ 1·0	1·69	1·00	1·30
Blekinge »	9	20	19	11·8	9·5	+ 1·5	+ 1·3	2·25	1·69	1·95
Uppsala »	2	21	21	14·0	11·4	+ 3·7	+ 3·2	13·69	10·24	11·84
Göteborgs o. Bohus »	13	22	22	15·3	13·7	+ 5·0	+ 5·5	25·00	30·25	27·50
Stockholms »	1	23	23	15·6	13·9	+ 5·3	+ 5·7	28·09	32·49	30·21
Malmöhus »	11	24	24	18·7	15·2	+ 8·4	+ 7·0	70·56	49·00	58·80
Summa	—	—	—	*247.2*	*195.5*	*0.0*	*0.0*	*220.44*	*187.60*	*198.88*
$\frac{1}{24}$ därav	—	—	—	10·300	8·146	—	—	9·1850	7·8167	8·2867

Vad riket i övrigt beträffar undervisades 30 293 gossar men endast 24 957 flickor i de högre skolorna. Gossöverskottet uppgick alltså till 5 336. Gossarna utgjorde 10·9 ‰ av den manliga och flickorna 8·8 ‰ av den kvinnliga befolkningen, allt år 1924.

På grund av anförda omständigheter har Stockholms stad uteslutits från denna undersökning.

För att närmare utröna storleken av samvariationen betecknas gossarnas promilletal med x och flickornas med y. För ett visst län angiva x- och y-värdet en punkt i planet. Genom det stråk av punkter, som på detta sätt erhålles, läggs en kurva, *regressionskurvan,* som möjligast nära ansluter sig till punktserien.

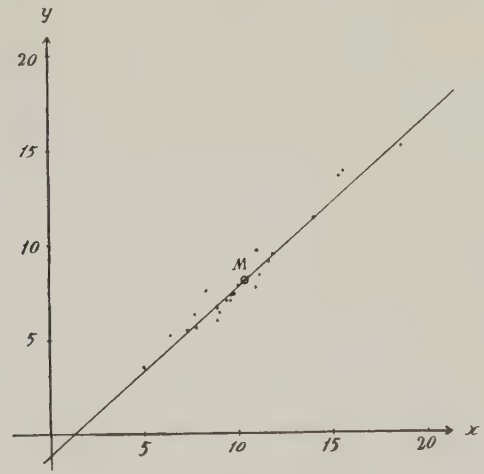


Fig. 10.

Ofta nöjer man sig med att som utjämningskurva använda en rät linje. Man sätter därför

$$y = a + bx \tag{1}$$

och bestämmer med tillhjälp av principen för minsta kvadratmetoden a och b så, att linjen (regressionslinjen) så nära

som möjligt ansluter sig till stråket av punkter. Av ett i första häftet av denna tidskrift för år 1931 överst å sid. 17 anfört exempel finner man, att

$$a = \frac{\Sigma x_i \Sigma x_i y_i - \Sigma y_i \Sigma x_i^2}{(\Sigma x_i)^2 - n \Sigma x_i^2}, \quad b = \frac{\Sigma x_i \Sigma y_i - n \Sigma x_i y_i}{(\Sigma x_i)^2 - n \Sigma x_i^2}.$$

Låt m_x betyda medeltalet av x-värdena och m_y medeltalet av y-värdena. Låt vidare σ_x och σ_y beteckna dispersionerna, d. v. s.

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma (x_i - m_x)^2}{n}} \quad \text{och} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma (y_i - m_y)^2}{n}}.$$

Då är

$$\Sigma x_i = n m_x, \ \Sigma y_i = n m_y, \ \Sigma (x_i - m_x) = \Sigma (y_i - m_y) = 0,$$

$$\Sigma x_i y_i = \Sigma [(x_i - m_x) + m_x] [(y_i - m_y) + m_y] =$$
$$= \Sigma (x_i - m_x)(y_i - m_y) + n m_x m_y,$$

$$\Sigma x_i^2 = \Sigma [(x_i - m_x)^2 + 2 m_x (x_i - m_x) + m_x^2] = n \sigma_x^2 + n m_x^2,$$

och alltså

$$a = m_y - \frac{m_x \Sigma (x_i - m_x)(y_i - m_y)}{n \sigma_x^2},$$

$$b = \frac{\Sigma (x_i - m_x)(y_i - m_y)}{n \sigma_x^2}.$$

Efter insättning av värdena på a och b i ekvationen *(1)* blir regressionslinjens ekvation

$$y - m_y = \frac{\Sigma (x_i - m_x)(y_i - m_y)}{n \sigma_x \sigma_y} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_x).$$

Sättes

$$(2) \quad r = \frac{\Sigma (x_i - m_x)(y_i - m_y)}{n \sigma_x \sigma_y} = \frac{\Sigma (x_i - m_x)(y_i - m_y)}{\sqrt{\Sigma (x_i - m_x)^2 \cdot \Sigma (y_i - m_y)^2}},$$

erhålles

$$(3) \qquad y - m_y = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_x)$$

eller

$$y - m_y = \frac{\Sigma(x_i - m_x)(y_i - m_y)}{\Sigma(x_i - m_x)^2}(x - m_x).$$

Denna räta linje är enligt minsta kvadratprincipen den bästa linje, som med x som argument utjämnar y-serien. Enligt det anförda äro a och b bestämda så, att

$$S = \Sigma(y_i - a - bx_i)^2,$$

d. v. s.

$$S = \Sigma\left[y_i - m_y - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x_i - m_x)\right]^2,$$

är ett minimum. Utvecklas kvadraten, erhålles

$$S = \Sigma(y_i - m_y)^2 - 2r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\Sigma(x_i - m_x)(y_i - m_y) +$$

$$+ r^2\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}\Sigma(x_i - m_x)^2.$$

Men enligt (2) är

$$\Sigma(x_i - m_x)(y_i - m_y) = nr\sigma_x\sigma_y.$$

Alltså

$$S = n\sigma_y^2(1 - r^2).$$

Minimum av den medelkvadratiska avvikelsen S/n är alltså

$$\sigma_y^2(1 - r^2).$$

Ifrågavarande avvikelse är alltså desto mindre ju större r^2 är. Därför utgör r ett mått på samvariationen.

Om $r^2 = 1$, d. v. s. $\Sigma(x_i - m_x)(y_i - m_y) = \pm n\sigma_x\sigma_y$, blir enligt (3)

$$y - m_y = \pm\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x),$$

d. v. s. de räta linjer, som gå genom punkterna $(m_x + \sigma_x, m_y + \sigma_y)$ och (m_x, m_y), respektive $(m_x + \sigma_x, m_y - \sigma_y)$ och (m_x, m_y). I detta speciella fall blir $S = 0$ och alltså samvariationen (vinkelkoefficienten positiv), respektive mot-

variationen (vinkelkoefficienten negativ) fullständig. — Om $r^2 = 0$, d. v. s. $\Sigma(x_i - m_x)(y_i - m_y) = 0$, och alltså minimet av medelkvadratiska avvikelsen det största möjliga eller lika med σ_y^2, förefinnes ingen samvariation och ej heller någon motvariation. Är r ett tal mellan 0 och 1, är samvariationen större ju större r är och ligger r mellan 0 och -1, är motsvarigheten större, ju närmare -1 som r ligger.

I det föreliggande exemplet, se fig. 10, finner man med användning av de i ovan anförda tabell angivna värdena, att $m_x = 10.300$, $m_y = 8.146$, $\sigma_y = 2.796$, $r = 0.978$ och $\frac{S}{n} = 0.340$. Regressionslinjens vinkelkoefficient

$$k = \frac{198.88}{220.44} = 0.902.$$

Om man i stället ordnat termerna efter växande värde på y och studerat motsvarande gång i x-serien, hade regressionslinjens ekvation blivit

$$\frac{x - m_x}{\sigma_x} = r \frac{y - m_y}{\sigma_y}$$

och vinkelkoefficienten

$$k = \frac{220.44}{198.88} = 1.108.$$

r benämnes i allmänhet *korrelationskoefficient*. Man använder ofta den här angivna metoden inom naturvetenskaperna och psykologien [1] för att utröna, huruvida det kan finnas något samband, *korrelation*, mellan två variabler x och y. Värdet r ger enligt det ovan anförda en föreställning om sannolikheten av ett dylikt samband, men om ett dylikt i verkligheten förefinnes, kan statistikern icke avgöra. Från hans synpunkt föreligger en större eller mindre grad av *samvariation* respektive *motvariation*. Också framhåller

[1] Se exempelvis G. A. Jaederholm, Undersökningar över intelligensmätningarnas teori och praxis, Stockholm, Bonnier 1914, bnd I sid. 372 och flerstädes.

professor Wicksell [1], att statistiken försinnligar, den förenklar, den t .o. m. fördjupar vår erfarenhet men den förklarar den icke.

6. Livförsäkring.

Beträffande de tre av varandra oberoende storheter, räntefot, dödlighet och omkostnader, vilka ligga till grund för ett försäkringsbolags beräkningar, stadgar gällande försäkringslag [2]: »Räntefoten må icke väljas högre än med hänsyn till kända förhållanden kan anses för framtiden betryggande. Dödlighetsmåttet må, i fråga om försäkringar för dödsfall, icke väljas lägre och i fråga om försäkringar för livsfall, icke väljas högre än som på grund av tillgänglig erfarenhet beträffande den ifrågavarande arten av försäkringsrörelse kan anses betryggande. Omkostnaderna må icke tagas lägre än vad enligt tillgänglig erfarenhet från försäkringsverksamhet kan anses vara erforderligt för sådan rörelse». Vidare föreskriver lagen, att ifrågavarande beräkningsgrunder skola vara stadfästa av Konungen.

Innan jag övergår till det egentliga ämnet, vilket måste begränsas till kapitalförsäkring för dödsfall på ett liv, vill jag förutskicka några upplysningar om anförda beräkningsgrunder, vilka samtliga skola grunda sig på statistisk erfarenhet. Vidare må erinras, att försäkringsbolagen räkna, som om allt förlöpte kontinuerligt. Det torde därför icke vara ur vägen att inledningsvis jämväl erinra om Eulers summationsformel.

Ränteintensitet. Det tillskott dK, som kapitalet K erhåller under tidselementet dt, är proportionellt mot kapitalets storlek och tiden alltså

$$dK = \delta K dt, \text{ varav } K = K_0 e^{\int_0^t \delta\, dt}.$$

[1] Loc. cit. sid. 80. Se ock K.-G. Hagströms förut anförda arbete Talens vetenskap, sid. 63.

[2] Lag om försäkringsrörelse, S. F. nr 257/1917, 213 §.

K_0 är kapitalets begynnelsevärde. δ kallas *ränteintensitet* och är funktion av tiden. Antag, att δ är konstant under 1 år. Sätt vidare $t = 1$, $K_0 = 1$ och låt i vara räntan under 1 år på 1 krona. Då är

$$1 + i = e^{\delta}, \text{ varav } \delta = \log \text{nat } (1 + i).$$

Om 100 i = 3, 3·5, 4, 4·5, 5,
så är 100 δ = 2·95588, 3·44014, 3·92207, 4·40169, 4·87902 respektive.

År 1895 funno sig bolagen, som tidigare räknat med en räntefot av 4 %, på grund av de nedgående räntekonjunturerna föranlåtna att med bibehållande av premierna beräkna premiereserven efter 3·5 % samt att successivt konvertera den efter 4 % beräknade redan avsatta fonden till 3·5 %. Nytillkomna bolag räknade med sistnämnda räntefot även beträffande premierna. Numera lägges allmänt en räntefot av 4 % till grund för beräkningarna, dock att för det äldre beståndet räntefoten vid avsättning till premiereserven antages vara 3 ½ %.

Dödlighetsintensitet. Vid verkställande av en dödlighetsundersökning bland livförsäkrade, skaffar man sig ett kortsystem bestående av ett kort för varje försäkring, försett med erforderliga data rörande den försäkrade. En grupp av kort innefattar exempelvis alla, som fyllt x år men icke $x + 1$ år. För var och en, som tillhört bolaget hela året, är observationstiden 1 år. Kortare än 1 år är observationstiden för 3 kategorier x-åringar: a) de, som voro under observation vid fyllda x år, men som utträtt före $x + 1$ års ålder, b) de, som inträtt i observation under året och voro kvar vid $x + 1$ års ålder, c) de, som trätt in och ut en eller flera gånger under åldern x till $x + 1$ år. Man adderar observationstiden för alla tillhörande åldersklassen i fråga. Låt L_x angiva sammanlagda observationstiden uttryckt i år. Antalet av dem, som utträdde ur åldersklassen på grund av dödsfall må betecknas med d_x. Då är $\frac{d_x}{L_x}$ den *centrala dödskvoten* för intervallet x till $x + 1$ år. De på angivet sätt för

varje åldersår erhållna dödskvoterna underkastas sedermera en utjämning.

Låt $f(x)$ vara antalet x-åringar under observation och antag, att ingen avgång äger rum av annan anledning än dödsfall. Då är $f(x+h)$ antalet kvarlevande efter h år. Den genomsnittliga dödsfrekvensen under tiden h år är alltså $\frac{f(x)-f(x+h)}{f(x)}$, och per år uppgår den till

$$-\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Antager man, att h går mot 0, erhålles

$$\mu_x = -\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

μ_x kallas dödlighetsintensiteten eller dödlighetsstyrkan vid åldern x. Tydligen kan man approximativt sätta den på förut beskrivet sätt erhållna centrala dödskvoten lika med dödlighetsintensiteten vid årets mitt.

Under tidselementet dt är dödssannolikheten $\mu_t dt$. Alltså är

$$\int_0^x \mu_t dt = -\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt = -\lg \frac{f(x)}{f(0)}.$$

Man brukar sätta $f(x) = l_x$ och $f(0) = l_0$. Då är

$$l_x = l_0\, e^{-\int_0^x \mu_t dt}$$

och alltså

$$\frac{l_{x+1}}{l_x} = e^{-\int_x^{x+1} \mu_t dt} = p_x.$$

$\frac{l_x}{l_0}$ är sannolikheten för en nyfödd att uppnå x års ålder, och p_x är sannolikheten för att en x-åring skall uppnå $x+1$ års ålder.

Ofta, särskilt inom befolkningsstatistiken, möter man begreppet dödlighetsfrekvensen (= dödlighetssannolikheten eller dödlighetskoefficienten) q_x för x-åringar.

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

Approximativt kan man antaga, att

$$\int_x^{x+1} \mu_t \, dt = \mu_x \int_x^{x+1} dt = \mu_x.$$

Alltså är

$$\frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - q_x = e^{-\mu_x} = 1 - \frac{\mu_x}{\underline{|1}} + \frac{\mu_x^2}{\underline{|2}} - \frac{\mu_x^3}{\underline{|3}} + \dots$$

En grövsta approximation är $q_x = \mu_x$. Medtages även andra digniteten av μ_x, är approximativt

$$q_x = \mu_x (1 - \tfrac{1}{2}\mu_x) = \frac{\mu_x}{1 + \tfrac{1}{2}\mu_x}.$$

Alltså är

$$q_x = \frac{2\mu_x}{2 + \mu_x} \quad \text{och} \quad p_x = 1 - q_x = \frac{2 - \mu_x}{2 + \mu_x}.$$

Hjälpfunktionen l_x, som har stor användning, tabuleras. Åt l_0 ger man ett så stort värde, exempelvis 100 000, att man slipper att använda decimalbråk. Dödlighetsintensiteten är definierad för huru höga åldrar som helst. Emellertid växer μ_x hastigt för stora värden på x, varigenom l_x närmar sig 0. För åldrar över 100 år sakna dödlighetsmåtten praktisk betydelse.

För att ådagalägga hur befolkningsdödligheten gått ned, må anföras följande exempel från Sveriges officiella statistik på dödlighetsfrekvensen $^0/_{00}$ bland 40-åriga män.

1871/80,	1881/90,	1891/00,	1901/10,	1911/20,	1921/25
10.20,	8.75,	8.24,	7.57,	7.08,	5.28.

Dödlighetsundersökningen för årtiondet 1921/1930 föreligger ännu icke slutförd. Av ovanstående framgår, att nedgången i dödligheten årtiondet 1911/1920 är avsevärt mindre än vad som brukar vara fallet. Dödlighetsfrekvensen för 40-åriga män under de 3 femårsperioderna

	1911/15,	1916/20,	1921/25
utgör resp.	6.79,	7.19,	5.28.

Stegringen under femårsperioden 1916/20 beror på de talrika dödsfallen i spanska sjukan under år 1918. Undersökningar, som utförts av 1928 års pensionskommitté [1] beträffande olika dödsorsaker, ha givit vid handen, att den allmänna dödlighetens nedgång företrädesvis beror på nedgång i dödligheten i tuberkulos, som upp till 50 års ålder är den dominerande dödsorsaken. Nämnda kommitté har med ledning av nedgången i dödligheten i olika sjukdomar uppgjort en dödlighetstabell avsedd att vara betryggande för den allmänna folkpensioneringen. För 40-åriga män antager kommittén, att dödligheten kommer att utgöra 4.5 $^0/_{00}$.

För en försäkringsanstalt, som meddelar försäkringar för dödsfall, torde det på grund av dödlighetens nedgång under ännu en följd av år framåt vara betryggande att använda en dödlighetstabell, som nära ansluter sig till nuvarande förhållanden. Beträffande försäkringar för livsfall, såsom exempelvis pensionsförsäkring, bjuder försiktigheten att använda en dödlighetstabell, som visar lägre dödlighet än den som råder för närvarande.

Vad som här närmast intresserar oss, är den dödlighetstabell, som de svenska bolagen lägga till grund för sina beräkningar, i fråga om kapitalförsäkring för dödsfall. Om vi fortfarande hålla oss till en 40-åring, så antages dödlighetsintensiteten pro mille, allteftersom tiden som förflutit efter försäkringens avslutande är

[1] Statens offentliga utredningar 1930: 15, Socialdepartementet. Nämnda kommitté har beräknat dödligheten 1921/1925 med Statistiska Centralbyråns material.

	0,	1,	2,	3,	4,	5 år,
vara	3·84	5·00	5·91	6·55	6·93	7·06.

I den föregående framställningen har förutsatts, att μ_x, p_x, q_x, o. s. v. äro funktioner endast av åldern x. Hos livförsäkrade personer ställa sig förhållandena på annat sätt. Vid försäkringens tecknande undergår sökanden en läkarundersökning eller ock avger han en självdeklaration rörande sitt hälsotillstånd enligt fastställt formulär. Därigenom sker ett urval, en selektion, varigenom sjuka eller med sjukdomsanlag behäftade personer så vitt möjligt frångallras. Bland 40-åringar, som varit försäkrade sedan de nyss fyllt 35 år, är enligt nyss anförda siffror dödlighetsintensiteten 7·06 ‰ men endast 3·81 ‰ för en nyförsäkrad 40-åring. Bland livförsäkrade är alltså dödlighetsintensiteten en funktion av två variabler, den försäkrades ålder x och försäkringens duration t. Vid bestämmandet av den centrala dödskvoten mellan x och $x + 1$ år bör alltså materialet ordnas i undergrupper efter durationen t. På angivet sätt erhålles dödlighetsintensiteten $\mu_{[x-t]+t}$ för en x-årig, som varit försäkrad t år; $[x - t]$ anger inträdesåldern.

Vid en undersökning av dödligheten bland läkarundersökta inom 17 svenska bolag under tiden $^1/_1$ 1895—$^{31}/_{12}$ 1906 fann professor Fredholm, att läkarurvalet kunde skönjas ännu 20 år efter det försäkringen tecknats. Sedan läkarundersökningen i allt större utsträckning [1] ersatts av självdeklaration, har läkarurvalets inflytande alltmera minskats. I de 13 bolag, som överenskommit om gemensamma beräkningsgrunder, har selektionen antagits göra sig gällande i 5 år, varefter den s. k. slutdödligheten inträder.

Senare erfarenhet har givit vid handen, att bland icke läkarundersökta är urvalet av så ringa betydelse, att den

[1] I bolaget Skandias år 1930 utgivna minnesskrift uppges, att av vuxna personer, som försäkrades hos bolaget år 1909, voro 7 % icke läkarundersökta. År 1929 hade procenten av under året tecknade försäkringar å icke läkarundersökta personer växt till 77·5 % av hela antalet beviljade försäkringar.

utjämnade dödlighetsintensiteten kan antagas vara funktion endast av åldern. En dylik dödlighetstabell benämnes aggregattabell och användes av några bolag särskilt vid s. k. folkförsäkring (försäkring mot vecko- eller månadspremier). I det följande antages för enkelhets skull, att vi ha att göra med en dylik tabell.

Omkostnader. Man skiljer i fråga om kapitalförsäkring för dödsfall mellan 3 olika slag av kostnader. För 1 kronas försäkringssumma sättes

$\alpha =$ engångskostnaden för försäkringens anskaffning,
$\beta =$ löpande årliga kostnaden (förvaltningskostnaden),
$\gamma =$ premieuppbördskostnaden (utgår endast under premiebetalningstiden och icke vid engångspremie) utgör en viss procent av premien.

Vidare inlägges i premien, dels ett utjämningstillägg för dödligheten, vars engångsvärde vid försäkringens tecknande är σ_1, dels ett katastroftillägg σ_2 (spanska sjukan el. d.), vilket skall utgå årligen. De 13 bolag, som överenskommit om gemensamma premier, antaga

$\alpha = 0{\cdot}035$ för flertalet försäkringsformer, $\sigma_1 = 0{\cdot}005$,
$\beta = 0{\cdot}00175$ » » » , $\sigma_2 = 0{\cdot}00025$,
$\gamma = 4\,\%$ av årspremien.

Såsom ovan är sagt, avse α, β, σ_1 och σ_2 en försäkringssumma av 1 krona.

Det förutsättes ej blott, att antagandena om räntefot, dödlighet och omkostnaderna skola var för sig vara bärkraftiga, utan ock att intet av de moment, som ingå i omkostnadsplanen, får överskridas.

Eulers (Mac Laurins) summationsformel.
Sättes $b = a + nh$, erhålles

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+nh} f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{a+\nu h}^{a+(\nu+1)h} f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_a^{a+h} f(x+\nu h)\,dx,$$

vilket senare uttryck erhålles genom att sätta $x = y + \nu h$ och därefter återinföra x som integrationsvariabel. Men enligt Taylors sats är

$$\int_a^{a+h} f(x+\nu h)\,dx = h f(x+\nu h) + \frac{h^2}{\underline{|2}} f'(x+\nu h) + \frac{h^3}{\underline{|3}} f''(x+\nu h) + \dots$$

$$(\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \dots).$$

Alltså

(a) $$\int_a^b f(x)\,dx = h \sum_{\nu=0}^{n-1} f(x+\nu h) + \frac{h^2}{\underline{|2}} \sum_{\nu=0}^{n-1} f'(x+\nu h) + \frac{h^3}{\underline{|3}} \sum_{\nu=0}^{n-1} f''(x+\nu h) + \dots$$

(b) $$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) = h \sum_{\nu=0}^{n-1} f'(x+\nu h) + \frac{h^2}{\underline{|2}} \sum_{\nu=0}^{n-1} f''(x+\nu h) + \frac{h^3}{\underline{|3}} \sum_{\nu=0}^{n-1} f'''(x+\nu h) + \dots$$

(c) $$\int_a^b f''(x)\,dx = f'(b) - f'(a) = h \sum_{\nu=0}^{n-1} f''(x+\nu h) + \frac{h^2}{\underline{|2}} \sum_{\nu=0}^{n-1} f'''(x+\nu h) + \frac{h^3}{\underline{|3}} \sum_{\nu=0}^{n-1} f^{\mathrm{IV}}(x+\nu h) + \dots$$

(d) $$\int_a^b f'''(x)\,dx = f''(b) - f''(a) = h \sum_{\nu=0}^{n-1} f'''(x+\nu h) + \frac{h^2}{\underline{|2}} \sum_{\nu=0}^{n-1} f^{\mathrm{IV}}(x+\nu h) + \frac{h^3}{\underline{|3}} \sum_{\nu=0}^{n-1} f^{\mathrm{V}}(x+\nu h) + \dots$$

Multipliceras ekvationerna (*b*), (*c*), (*d*) ... resp. med Ah, Bh^2, Ch^3, ... och adderas till ekvationen (*a*), erhålles

$$\int_a^b f(x)\,dx + Ah[f(b) - f(a)] + Bh^2[f'(b) - f'(a)] +$$
$$+ Ch^3[f''(b) - f''(a)] + \ldots =$$
$$= h\sum_{\nu=0}^{n-1} f(x+\nu h) + h^2\left(\frac{1}{\underline{|2}} + A\right)\sum_{\nu=0}^{n-1} f'(x+\nu h) +$$
$$+ h^3\left(\frac{1}{\underline{|3}} + \frac{A}{\underline{|2}} + B\right)\sum_{\nu=0}^{n-1} f''(x+\nu h) + \ldots$$

Bestämmas A, B, C, ... så, att

$$\frac{1}{\underline{|2}} + A = 0,$$
$$\frac{1}{\underline{|3}} + \frac{A}{\underline{|2}} + B = 0,$$
$$\frac{1}{\underline{|4}} + \frac{A}{\underline{|3}} + \frac{B}{\underline{|2}} + C = 0,$$
$$- - - - - - -,$$

d. v. s. $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{12}$, $C = 0$, $D = -\frac{1}{720}$ ..., så erhålles

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{\nu=0}^{n-1} f(x+\nu h) + \frac{h}{2}[f(b) - f(a)] -$$
$$- \frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] + \ldots.$$

I själva verket är $B = \frac{B_2}{\underline{|2}}$, $D = -\frac{B_4}{\underline{|4}}$ ..., då B_2, B_4, ... äro de bernoulliska talen, vilka definieras genom serieutvecklingen

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{B_2}{\underline{|2}}x^2 - \frac{B_4}{\underline{|4}}x^4 + \ldots$$

Här är icke tillfälle att ingå på de villkor, som en funktion måste uppfylla, för att ifrågavarande formel skall gälla.[1]

Forts.

[1] Se Schlömilch, Vorlesungen über einzelne Theile der höheren Analysis, dritte Auflage, del II sid. 229 ff., Braunschwig, Vieweg und Sohn, 1879. Se ock Hugo Broggi, Versicherungsmathematik, Leipzig und Berlin, Teubner, 1911.

Projektionsapparaternas verkningssätt.

Av HELMER BÄCKSTRÖM.

De vanliga läroböckerna i fysik pläga vid behandlingen av optiken ägna ett litet stycke åt projektionsinstrumenten av kondensortyp. Tyvärr är emellertid den korta redogörelsen för projektionsapparaterna nästan ständigt felaktig i ett hänseende: det anges nämligen, även i våra mest använda läroböcker så gott som utan undantag, att kondensorns ändamål är att koncentrera ljus på den fotografiska bilden (diapositivet), vilken skall förstoras. Så är likväl ingalunda fallet. Da detta fel återkommer även i nyutgivna arbeten, kan det vara lämpligt att rikta uppmärksamheten på detsamma och samtidigt lämna en kort redogörelse för projektionsapparaternas verkningssätt.

Projektionsinstrumenten kunna indelas i två huvudtyper, alltefter beskaffenheten hos det original, som skall förstoras. Är originalbilden ogenomskinlig (t. ex. en bokillustration, en fotografisk kopia på papper e. d.), benämnes det för dess projektion avsedda instrumentet *episkop*. Är återigen originalet genomskinligt och skall projicieras i genomsikt, kallas instrumentet *diaskop* (skioptikon, etc.).

Principen för ett episkop framgår av fig. 1. Originalet (pappersbilden) befinner sig vid A och belyses kraftigt av ljuskällorna L. Medelst projektionsobjektivet O projicieras en bild av A på skärmen B. Av utrymmesskäl har i figuren avståndet OB tecknats starkt avkortat. — Da varje punkt av originalet A reflekterar ljus i alla riktningar, så blir det en ganska ringa del av ljuset, som genom objektivet når fram till skärmen och deltager i avbildningen. Jag har sökt tydliggöra detta i fig. 1 genom att till planet

A utdraga en av strålarna från den undre lampan och med streckade linjer markera de vid den diffusa reflexionen åt alla håll spridda, svaga strålarna. Av dessa senare bliva endast de av nytta, som verkligen träffa objektivet, medan de övriga uppfångas av projektionsinstrumentets väggar. På grund härav fordra episkopen relativt starka ljuskällor och kunna likväl ej giva höga förstoringsgrader, emedan bildens intensitet blir obetydlig vid stor förstoring. De tarva även mycket »ljusstarka» objektiv; d. v. s. objektivets diameter bör vara sa stor som möjligt i förhallande till brännvidden. — Episkopen hava blivit utomordentligt förbättrade under senare tid och finna numera vidsträckt användning i skolans tjänst. I regel placerar man originalet i horisontellt läge och böjer strålgången 90° genom en vid objektivet anbragt metallspegel (fig. 4).

Vid projektion av genomskinliga föremål (diaskopisk projektion) kan belysningen ordnas på två principiellt olika sätt. Antingen kan det genomskinliga originalet belysas med diffust ljus eller ock med riktat ljus. Det finnes dock även övergångsformer mellan dessa båda typer.

Den diffusa belysningens princip kan även åskådliggöras av fig. 1. Vi tänka oss då ytan A vitmenad och placera det genomskinliga originalet vid a. Ytan A belyses av de kraftiga lamporna L och återkastar ljus i alla riktningar. Glasbilden vid a erhåller därför en mycket jämn, diffus belysning. Medelst objektivet O avbildas originalet a på skärmen B. Som nyss blivit nämnt utnyttjas ljusströmmen från lamporna relativt dåligt; instrument av denna typ fordra därför mycket starka lampor (L) samt objektiv av stor öppning, om den projicierade bilden ej skall bliva för ljussvag. Projektionsapparater av denna typ lämpa sig därför ej till projektion av skioptikonbilder o. d., men de hava funnit en vidsträckt användning som fotografiska förstoringsinstrument. De enklaste instrumenten av denna art pläga kallas »ljuslådor». Närbesläktade härmed äro de fotografiska förstoringsapparater, där lampan befinner sig

rakt bakom glasbilden (negativet); ljuset diffusseras då medelst en mjölkglasskiva mellan lampa och glasbild.

Avsevärt kraftigare belysning av det genomskinliga originalet kan erhållas genom att utsätta det för ljuskällans

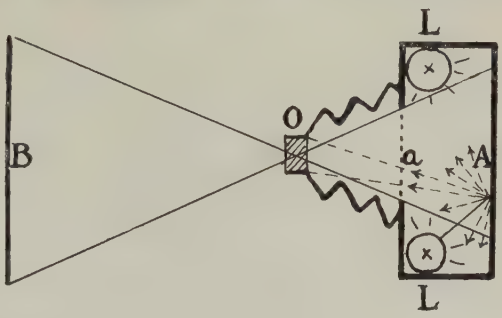


Fig. 1.
Episkop, resp. förstoringsapparat med diffus belysning.

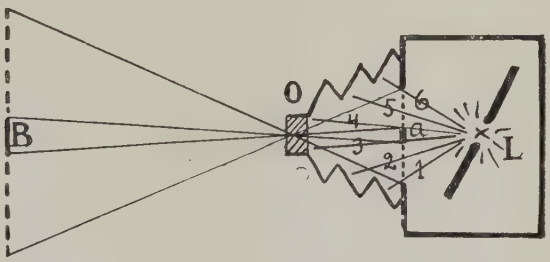


Fig. 2.
Oduglig anordning för genomsiktsprojektion.

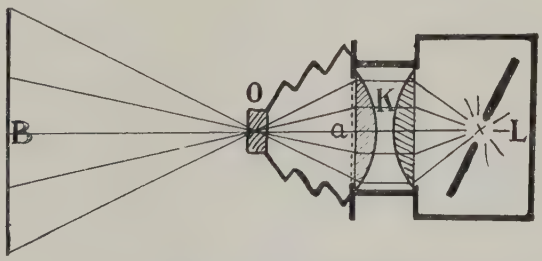


Fig. 3.
Projektionsapparat av kondensortyp.

direkta strålar. I fig. 2 tänka vi oss glasbilden a belyst av den kraftiga båglampan L. Ett antal från denna kommande strålar hava tecknats som räta linjer samt betecknats med siffrorna 1—6. Strålarna 1 och 2 samt 5 och 6 passera originalet men träffa aldrig objektivet och kunna därför ej bidraga till projektionsbildens uppkomst. Då intet

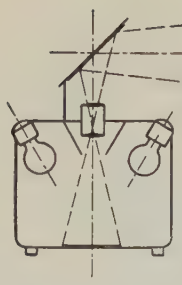


Fig. 4.

ljus träffar de nämnda ställena av originalet i sådan riktning, att det sedermera når objektivet, så komma dessa partier av glasbilden ej att avbildas på skärmen B. Endast glasbildens mellersta parti, begränsat av strålarne 3 och 4 kommer att bliva projicierat. Detta parti har i figuren markerats med ett fetare streck. Det är tydligt, att det härvid alltid måste vara fråga om ett mycket begränsat område av glasbilden; det maste nämligen bliva mindre än objektivets öppning.

En anordning av nu nämnd typ kan knappast finna praktisk användning. Skall den kunna utnyttjas, så måste man ordna det så, att även strålarna 1, 2, 5 och 6 nå objektivet. Närmast till hands ligger därvid att välja ett objektiv av så stor diameter (»öppning») att hela ljusknippet genom glasbilden uppfångas av detsamma. Detta ställer sig dock svårt för att ej säga omöjligt. En skioptikonbild är $8\,^1/_4 \times 8\,^1/_4$ cm^2 stor, ofta även 9×12 cm^2. Objektivets öppning måste alltså avsevärt överträffa denna storlek; objektivets diameter bör vara minst lika manga ganger större än glasbildens största diameter som avstandet LO är större än La. Samtidigt måste ju objektivets brännvidd vara mindre än Oa, eftersom det skall avbilda a vid B. Ett objektiv av sålunda tänkt slag skulle alltså bliva ett praktiskt taget outförbart monstrum med ofantligt öppningsförhållande. Pa grund av sina dimensioner och då det måste vara av högsta kvalitet för att bilden skall bliva skarp, skulle det även ställa sig utomordentligt dyrt. I stället har man valt en enklare och billigare utväg. Innanför glasbilden a placeras en kraftig lins (eller linskombination), som bryter samman det fran ljuskällan L kommande strålknippet, så att det verkligen går in i objektivet. — I fig. 3 har ett instrument av nu nämnd typ blivit uppskisserat. Ljuset från ljuskällan L träffar linssystemet K.

Detta kallas för *kondensor* och består i allmänhet av tvenne plankonvexa linser med de konvexa ytorna placerade mot varandra. Kondensorn sammanbryter ljusknippet och tvingar in det i objektivet O. Det koncentrerar däremot ej ljuset på glasbilden a, vilken skulle ha blivit lika starkt belyst, om kondensorn avlägsnats och båglampan flyttats så mycket närmare, som motsvarar kondensorns tjocklek. Kondensorns uppgift är alltså att koncentrera ljuset på objektivet men ej på glasbilden. Kondensorn måste givetvis vara rätt stor i genomskärning (något större än glasbilden) men behöver ej för övrigt vara av samma utomordentliga kvalitet som projektionsobjektivet. Mellan avstånden LK, KO och kondensorns brännvidd gälla naturligtvis de i linsformeln preciserade relationerna. - Avstånden Oa resp. OB regleras även med hänsyn till objektivets brännvidd enligt linsformelns fordringar, varvid förhållandet mellan OB och Oa bestämmer förstoringsgraden.

Kondensorapparater hava fått utomordentligt stor användning, dels som projektionsapparater för ljusbilder (skioptikonbilder), dels för fotografiskt förstoringsarbete, men framförallt som projektorer för kinematografisk film. I senare fallet finnas anordningar införda för hastig bildväxling samt bländare, som stänger för objektivet under bildbytet.

I många fall utnyttjas projektionsanordningar av nu nämnt slag till det allra yttersta. Vi behöva bara tänka på en större biografiokals bildprojektion och besinna, att den över en hel vägg projicierade bilden är förstorad från en originalstorlek av 18×24 mm^2. Det är tydligt, att ljuskällan i dylika fall måste vara synnerligen kraftig. Också användas härför endast båglampor med stor energiförbrukning. Vid skolinstrument och amatörapparater, liksom vid skioptikoninstrument användes dock numera endast glödlampor (s. k. projektionslampor), vilkas glödtrådar äro lindade till små spiraler och placerade bredvid varandra så, att en liten kvadratisk ljusyta erhålles. Denna måste

givetvis hava mycket ringa storlek, då ju kondensorn skall avbilda densamma inuti objektivet; bilden av lysytan måste sålunda vara mindre än objektivets öppning.

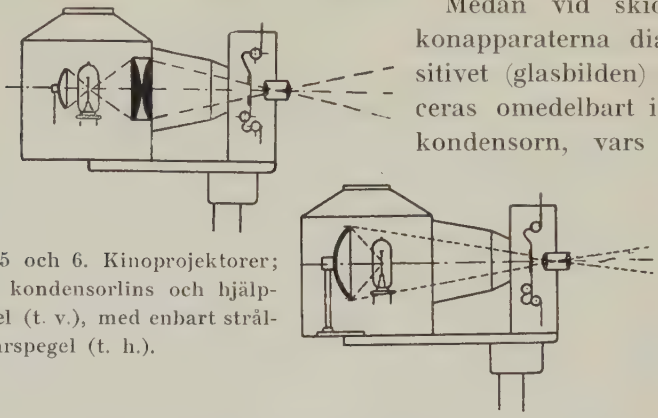


Fig. 5 och 6. Kinoprojektorer; med kondensorlins och hjälpspegel (t. v.), med enbart strålkastarspegel (t. h.).

Medan vid skioptikonapparaterna diapositivet (glasbilden) placeras omedelbart intill kondensorn, vars yta därför endast obetydligt överträffar glasbilden, använder man vid kinematografisk projektion kondensatorer, som vida överträffa den lilla filmrutan i ytstorlek; i stället avlägsnas filmen från kondensorn, sa att den kommer i en trängre del av ljusknippet, nära intill objektivet. Ljusströmmen är här alltså starkt koncentrerad, varigenom större effektivitet ernås. Detta fall åskådliggöres av fig. 5, där anordningarna för filmens frammatning synas omedelbart till vänster om objektivet. Denna figur visar oss även, hur man genom att anbringa en konkavspegel bakom ljuskällan kan nyttiggöra det åt detta håll flödande ljuset och skicka det tillbaka till ljuskällans närhet och därifran till kondensorn och objektivet etc. Befinner sig salunda ljuskällan nära den sfäriska spegelns centrum, så kommer tydligen dess bild att falla nära intill densamma; ljuskällan blir alltså

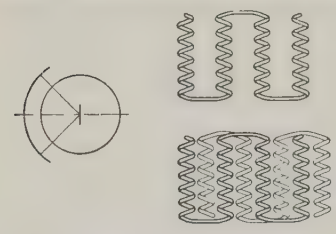


Fig. 7. Hjälpspegeln vid projektionslampor anordnas så, att spegelbilden av lystrådarna synes mellan lystrådslingorna.

förstärkt. Är det därvid fråga om en projektionslampa av glödlampstyp, lagar man sa, att bilden av glödtrådarna faller mellan lampans egna glödtradar (fig. 7). Vid en hel del moderna kinematografapparater har man gatt ett steg längre och borttagit kondensorn samt låter spegeln göra dennas tjänst (fig. 6); härigenom befrias man fran de eljest oundvikliga ljusförlusterna genom absorption och reflexion i kondensorn.[1]

Om enskilt arbete.

Av **BENKT SÖDERBORG.**

I våra dagars pedagogiska diskussion ljuder som ett fältrop det högljudda kravet på lärjungarnas självverksamhet, och det är ingalunda första gången i pedagogikens historia som det kravet framföres. Det är all anledning för varje intresserad lärare att lyssna till den maningen och begrunda självverksamhetens idé, även om det icke kan förnekas, att det bedrives en hel del ofog med orden och begreppen »självverksamhet» och »arbetsskola». De flesta människor få lita till sig själva och taga sig fram på egen hand i livet. Deras barna- och ungdomsår. skoltiden, böra då icke få förflyta utan att de också i skolan få tillfällen till ett mera fritt arbete på egen hand. Vad de allmänna läroverken beträffar, lämnar läroverksstadgan en hel del värdefulla anvisningar i detta hänseende. Men den lämnar också något, som är mera värt än anvisningar, och det är en bestämd uppgift: Lärjungarna i gymnasiets två högsta ringar skola utföra »enskilt arbete». Här ha vi något att ta på. Självverksamhetens princip skall här tillämpas i full utsträckning, men på ett begränsat område inom den fasta ramen för undervisningens anordning vid läroverken. Ingen risk finnes för att det

[1] Fig. 4—7 äro hämtade ur Era, h. 1. 1931. Red. av denna tidskr. har godhetsfullt ställt dem till förf:s disposition.

skulle medföra någon löslighet i det hela. Jag anser, att allt, som kan göras, bör göras för att få det enskilda arbetet att slå igenom, det är: att få det omfattat med intresse och aktning av lärjungarna. Har man lyckats med det, då är syftet med det enskilda arbetet vunnet.

Att leda det enskilda arbetet är en tacksam men svår uppgift. Svårigheterna äro av två slag: att få lärjungarna med på arbetet och att få arbetet organiserat på ett sätt, som icke blir för betungande för lärare och lärjungar. Den förra svårigheten har sin rot i våra svenska pojkars naturliga tröghet och oföretagsamhet och vana att inte göra något annat än det, som i detalj blir dem förelagt. Denna något indolenta läggning i gossarnas psyke är ett faktum, och det kan i detta sammanhang vara likgiltigt, huruvida den är att fatta såsom en nationell egenskap eller — till en del åtminstone — är en följd av det traditionella arbetssättet i våra skolor. Med framträdandet av detta drag sammanhänger ett annat förhållande i våra gymnasier. Där gå många präktiga pojkar, som sakna utpräglad fallenhet och intresse för bokliga studier. Betecknande är det svar, som en gymnasist en gång gav mig. Han hade fått till uppgift att undersöka ett elektriskt maskinaggregat och skulle sedan inför klassen redogöra för det. Demonstrationen blev mager. Åhörarna fingo icke någon klar föreställning om de olika delarnas funktioner, och föredragshållaren saknade själv en sådan insikt. Han höll med om att så var fallet och skulle fylla luckorna i sitt vetande i detta hänseende, men innan detta blev gjort, kom han en dag och frågade, om han inte fick göra enskilt arbete också i kemi. På mitt svar, att han borde göra arbetet i fysik färdigt först, genmälde han: »Enskilt arbete i fysik är så arbetsamt, för man måste tänka så mycket». Denna gymnasist har många gelikar. Det är orätt att med en axelryckning säga om dem alla, att de icke ha på gymnasiet att göra. Det är värdefullt för de medelmåttigt begåvade eller för bokliga studier mindre intresserade gymnasisternas skolutbildning att också de få ett arbete till självständigt genom-

förande, ett arbete, som kan intressera dem och som inte har karaktären av ett nödvändigt, intresselöst onus, och det är av vikt för ett lyckligt genomförande av det enskilda arbetets princip och för detta arbetes renomé, att så sker.

Den första svårigheten, som möter läraren, är således att leda valet av ämne och uppgift. Jag skall nedan lämna några ur läroverkens årsredogörelser hämtade exempel på uppgifter för enskilt arbete i de naturvetenskapliga ämnena, och jag skall här icke försöka att ge några råd och förslag utöver dem, som läroverksstadgan och överstyrelsens cirkulär innehålla. Men jag skall understryka vikten av att *varje* lärare i gymnasiets högsta ringar orienterar lärjungarna och inför klassen ger en exposé över vad som kunde tänkas bli föremål för behandling i ett enskilt arbete inom hans fack. Denna framställning bör man icke göra i förbigående, på några minuter, utan verkligen ägna åtminstone en eller ett par lektioner däråt. Det är väl använd tid.

Det gäller vidare att se till, att lärjungarna verkligen välja ämne och i görligaste mån förhindra, att de i stället välja lärare. Om anledningen till att de välja lärare är den, att Ingen lärare bör i kvasiförnäm uppfattning om sitt ämne så är därom endast gott att säga. Men om valet sker endast i avsikt att på billigaste sätt komma ifrån uppgiften, så bör det förhindras. För den skull böra måttliga krav och i möjligaste mån lika minimikrav ställas på det enskilda arbetet. Ingen lärare bör i kvassiförnäm uppfattning om sitt ämne anse det reserverat endast »för de begåvade». Det är oriktigt att begära, att redogörelserna skola vara små akademiska avhandlingar, och det är en kollegial plikt att icke sätta sina kvalitets- eller kvantitetsfordringar så högt, att man skrämmer bort lärjungarna från ens eget ämne och därmed stjälper över arbetet på sina kolleger. Det synes mig både möjligt och lämpligt, att man inom kollegiet kommer överens om ett visst minimikvantum av arbete, som, om det är ordentligt utfört, berättigar till godkännande av det enskilda arbetet, även om detta icke skulle ha lämnat så märkligt

resultat, och jag tänker mig, att 40 till 50 timmar per år skulle kunna tagas som en norm. Naturligtvis kommer den tid, som många lärjungar använda för sitt enskilda arbete, att bli väsentligt längre. I den liggare för enskilt arbete, som föres vid läroverket, är det lämpligt att upptaga av lärjungen uppgiven tid för arbetet.

Den andra svårigheten med det enskilda arbetet gällde dess organiserande. Jag inskränker mig här till att tala om de experimentella, naturvetenskapliga ämnena. Man kunde vänta sig — och läroverkens årsredogörelser bekräfta det — att uppgifterna för enskilt arbete inom dessa ämnen skulle bli av tre olika slag: 1) experimentellt arbete på laboratoriet eller insamlande av material och observationer i naturen; 2) läsning av litteratur och författande av en uppsats; härtill kommer för fysikens del: 3) lösandet av ett antal räkneexempel. Det sista slaget av uppgifter anser jag vara det minst värdefulla; betraktat endast såsom enskilt arbete är det värdelöst. Det ger visserligen en god träning och övning i ämnet, men det faller helt på sidan om det enskilda arbetets idé, ty det förutsätter icke och kräver icke någon som helst självständighet eller initiativförmåga. Den bästa, d. v. s. den ändamålsenligaste och mest givande uppgiftsgruppen är den första. Men då uppstår frågan, huru de enskilda lärarna skola få tid att leda och övervaka laboratoriarbetet. Man kan icke lämna lärjungarna på laboratoriet utan övervakning. Den rationellaste lösningen av denna svårighet synes mig vara den, att institutionsföreståndarna i biologi, fysik och kemi eller annan lämplig lärare i dessa ämnen vid arbetsfördelningen för läsåret få antalet undervisningstimmar bestämt till lägsta möjliga (18 tr) mot skyldighet att övervaka arbetena på laboratoriet tre timmar i veckan. Överenskommelse göres med lärjungarna om lämpligast möjliga tid. På Norra reallläroverket hade sålunda lärjungarna tillträde till fysiska laboratoriet för enskilt arbete därstädes varje tisdag kl. 18 —20,30 under förra läsåret. För

arbeten i de kemiska och biologiska laboratorierna kunde tider anvisas i anslutning till respektive laborationer.

Det enskilda arbetet borde icke undanhållas den stimulans, som ligger i ett särskilt för detta arbete avgivet betyg. Av de uttalanden om det enskilda arbetet, som läroverksstadgan gör på flera håll, framgår, att stadgan — om jag nu får betrakta stadgan så personligt — anser det vara synnerligen betydelsefullt, men stadgan drar inte ut konsekvenserna av denna värdesättning. På tal om det enskilda arbetets bedömande såsom prestation säger nämligen stadgan endast: »Då lärjunge utfört enskilt arbete i visst ämne, skall vid bestämmande av vitsord över lärjunges insikter i detta ämne hänsyn tagas härtill». Givetvis kan det förekomma, att en sådan betygssättning naturligen låter sig göras. Men mycket ofta måste fall förekomma, då den icke ger rättvisa åt både det enskilda arbetet och den normala betygsskalan i ämnet. Det enskilda arbetet kan nämligen i och för sig vara utmärkt, men omfatta en sådan detalj eller ligga så på gränsområdet till det ämne, som det vid betygssättningen skulle hänföras till, att det icke lämpligen kan honoreras med ett högre betyg i detta ämne. Å andra sidan skulle det vara motbjudande och knappast kunna betraktas såsom i sak rättvist att underkänna i ämnet en lärjunge med approbabla kunskaper, därför att det enskilda arbetet icke vore nöjaktigt. Det hade varit riktigare och i alla avseenden bättre, om i stället hade föreskrivits, att särskilt vitsord för enskilt arbete skall upptagas i vårterminens betyg och framför allt i studentbetyget, och där kunde lämpligen anges det ämne, inom vars råmärken arbetet utförts. Vid avgivande av detta vitsord skulle i första hand hänsyn tagas till den förmåga av initiativ och den grad av självständighet, som lärjungen visat i arbetet, därnäst till dess resultat och slutligen till dess kvantitet. Ett sådant vitsord bleve av betydelse för studenten, och för hans eventuelle arbetsgivare bleve det mera upplysande än de vitsord han har över kunskaper i olika ämnen.

När det enskilda arbetet redovisas i skriftliga redogörel-

ser böra dessa bli läroverkets egendom, såsom nu är fallet med de skriftliga proven i real- och studentexamen. De böra förvaras i läroverkets arkiv. Läroverkens årsredogörelser innehålla mer eller mindre fullständiga uppgifter om de enskilda arbeten, som under läsåret utförts. Det kan då vara av intresse och nytta för en lärare att få tillgång till vissa lärjungeuppsatser från andra läroverk än hans eget, och han har då endast att rekvirera dem hos ifrågavarande läroverks bibliotekarier. Med en sådan anordning vunne man också en annan fördel. Det är helt naturligt, att under årens lopp vissa uppgifter komma att gå igen, och det är väl då inte alldeles osannolikt, att vissa lärjungar skola frestas att i otillåten grad söka begagna sig av äldre arbeten. Ett sådant förfuskande av det enskilda arbetet kan väl icke helt omöjliggöras, men det skulle genom den föreslagna anordningen åtminstone försvåras.

Jag har gått igenom förteckningarna på uppgifter för enskilt arbete i några av årsredogörelserna för de allmänna läroverken och lämnar här några exempel på uppgifter i matematik, biologi, fysik, kemi och teckning.

Matematik. Projektionsmetoden och dess tillämpningar på uppgifter inom den analytiska mekaniken. Om pytagoreiska och heroniska tal. Användning av s. k. förkortat beteckningssätt på uppgifter inom analytiska geometrien. Utökad kurs i funktionsteori och integralkalkyl. Die Quadratur des Kreises (Mat. Phys. Bibl., Bd 12). Livförsäkringsteknikens grunder. Allmänna metoder vid plangeometriska teorems och problems lösning (Hellgren, Cassel). Problemlösning.

Biologi. Uppdissektion av hjärnan hos haj, gädda och groda. Dissektion av abborre, gädda, karp och sill (jämförelse mellan byggnaden av andnings- och matsmältningsorgan hos dessa olika typer). Experimentell undersökning av fiskhjärtats fysiologi. Dissektion av bakre extremiteternas senor och muskler hos kanin. Dissektion av duva (höns o. a.) Färgsinnesundersökning av läroverkets samtliga lärjungar

(enl. Ishihara). Växjötraktens mossor och lavar. Nyköpingstraktens Corydalisarter och hybrider. Insamling av fjärilar från en socken i Dalarna (jämte läsning av vissa kapitel i Adlerz' Svenska fjärilar). Studier över skogarnas skadeinsekter. Undersökning och analys av ett par växtsamhällen. Planktonstudier. Insektlivet i sötvatten. Encelliga alger. Mjölks bakteriehalt. Människans tänder. Människans blod. Studier över blommornas byggnad och pollination (läsning, ritning, beskrivning). Det biologiska urvalet inom kulturfolken. Paleontologiska utvecklingsserier.

Fysik. Bestämning av verkningsgrad och av koppar- och friktionsförluster i shunt- och seriemotor. Teslainstrumentarium. Uppmätning av neons glimljusspektrum. Termoelektrisk temperaturmätning. Tillverkning av astronomisk kamera, fotografering av solen och månen. Adiabatiska tillståndsförändringar. Bestämning av sp. värmet hos koksaltlösningar och dess ändring med koncentrationen. Detaljundersökning av läroverkets motorgenerator med kopplingstavla. Kan man märka någon gång i värdena på den Jouleska konstanten vid användande av olika motstånd och strömstyrkor? Detaljundersökning av en volt-ampèremeter, utökning av dess mätområde. Motorprovningar. Ledningsförmåga och disssociationsgrad hos klorkaliumlösningar. Ljusintensiteten i olika riktningar kring en glödlampa (med fotocell). Bilmotorns konstruktion och verkningssätt. Apparat för bestämmande av värmeekvivalenten. Konstruktion av lämplig fotometer för skolbruk. Galvanoplastik med framställning av kopia av medalj. Konstruktion av fullständig telefonanläggning. Konstruktion av ett femtiotal termoelement med förslag till element för skolbruk. Undersökning av elektronrör. Akustiska försök. Ytspänningsfenomen. Temperaturen hos en kokande koksaltlösning och dess ånga. (Den sista uppgiften är från Luleå läroverk, vars årsredogörelse innehåller in extenso lärjungarnas egen, synnerligen intressanta redogörelse för denna undersökning.) Hysteresisfenomenet. — Astronomi (Nordenmark, Newcomb—Berg-

strand). Meteorologi (Wallén). Atomsprängning. Elektroteknik. Om Faraday. — Räkneuppgifter.

Kemi. Framställning av natriumhydroxid genom elektrolys av koksalt med bestämning av strömutbyte. Elektrolytisk reduktion av järnsalt med bestämning av strömutbyte. Framställning av ett antal galvaniska metallöverdrag (silver, koppar, mässing, tenn, zink, nickel). Termisk undersökning av systemet vismut—kadmium. Dito av naftalin—difenylamin. Molekylarviktsbestämningar för tre ämnen (enl Meyer). Fryspunktsbestämningar i bensol. Toning av kopiepapper, svärtningskurvor. Kvalitativa analyskurser (c:a 20 prov). Synteser: oorganiska färgämnen; dubbelsulfat; halogensalter; komplexa koboltföreningar; vissa metallers föreningar; vissa organiska ämnen (pikrinsyra, metadinitrobensol, nitrocellulosa jämte gelatinering av densamma; anilinfärgämnen fluorescein, eosin, rosolsyra). Framställning av normallösningar, permanganattitreringar. Titrering på kloridjon. Framställning av svavelsyra och bestämning av svavelsyrehalten i lösningar. — Atomernas byggnad. Socker ur sockerbetor. Elddonet genom tiderna. Sveriges järnhantering. Kvävet, dess tillgodogörande och betydelse. Sprängämnesindustrien.

Teckning. En kartskiss. Övningsuppgifter till projektionsläran. Grupp i kol eller blyerts. Bilmotor. Travers. Flottningsränna. Stockholms rådhus (planritning, fasadritning, konstruktionsritning). Engelbrektskyrkan.

Uppgifter för de obligatoriska laborationsövningarna och det enskilda arbetet i kemi.

Av G. STARCK.

(Forts.)

Här nedan följa förslag för enskilda arbetet.

Ring III:4 och III:3

a) Exprimentellt arbete.

Oorganiska synteser på metallföreningar. En lämplig handledning erhålles i L. Vanino, *Handbuch der präparativen Chemie I,* som upptar ett stort antal föreningar och icke blott de vanligaste. Preparaten böra framställas av avvägda mängder utgångsmaterial, ej för sma; utbytet beräknas, kristaller böra så vitt möjligt bli stora och vackra, fällningar tvättas omsorgsfullt till renhet. En redogörelse skall skrivas, upptagande siffror och beskrivning av operationer, gärna också föreningens egenskaper och annat av intresse.

En kurs i kvalitativ analys i lösning med enkla prov. Som tillämpning kvalitativ analys av ett mineral (dock knappast silikat utan sulfid eller karbonat) eller en legering.

b) Litterärt arbete.

Läsning av och redogörelse förhörsvis för något valt kapitel i oorganisk eller teknisk kemi. Alternativt författande av en något så när utförlig uppsats över dylikt ämne.

Svarigheten är här att finna lämplig svenskspråkig litteratur. Läroböcker i kemi på svenska och av större omfång saknas helt. Goda tyska och engelska läroböcker finns det gott om (t. ex. de välbekanta av Hofmann, Hollemann, Mecklenburg); det enkla språket borde ej bereda nagra svårigheter annat än i fraga om tekniska termer, vilka läraren kan förklara. I teknisk kemi har man på svenska:

Uppfinningarnas bok, varav bandet Kemisk industri visserligen ännu ej är utkommet, däremot bandet Gruvbrytning och metallurgi.

Alf Larson, Sveriges kemiska industri; Stockholms Gasverk, Minnesskrift 1928; B. Colbjörnsen, Om konstgödselmedel; G. Angel, Elektrokemi (även teknisk); Pa tyska: Ost, Chemische Technologie.

Förslag till ämnen: Inläsning av någon grupp i det periodiska systemet efter en större lärobok, t. ex. den 4:e, 5:e eller 7:e gruppen med lämpliga uteslutningar.

Komplexföreningar.

Inläsning av någon teknisk oorganisk fabrikation efter större handledning, t. ex.:

Någon eller några metallurgiska processer.

Glas, lervaror, murbruk, cement, gips.

Kloralkalielektrolys i dess olika former.

Gödselmedel (speciellt kväve).

Sulfat och soda, pottaska, kaustika alkalier.

Svavelsyra, salpetersyra.

Några av dessa ämnen lämpa sig också såsom uppsatsämnen. De kunna även kombineras med experimentellt arbete, varvid man får försöka avväga arbetsbördan, så att ett utfört experimentellt arbete bör medföra minskade fordringar på det litterära arbetets omfattning. Exempel på sådana kombinationer äro:

Framställning av mineralfärgämnen.

Elektrolys av koksalt och titrimetrisk bestämning av bildad natriumhydroxid i förening med bestämning av strömutbyte. Textläsning: kloralkalielektrolys.

Elektrolytisk framställning av hypoklorit och klorat jämte läsning härom.

Undersökning av naturliga fosfaters och fosforgödselmedels löslighet i vatten, citrat, syror. Textläsning: fosforgödselmedel.

Haltbestämning av ammoniumsulfat genom destillation med natronlut. Textläsning: kvävegödselmedel.

Bestämning av de spec. vikterna av svavelsyror av olika koncentrationer och upprättande av en interpolationstabell över försöket. Textläsning: framställning av svavelsyra.

Samma försök med andra viktiga lösningar, såsom salpetersyra, saltsyra, ammoniak, natrium- och kaliumhydroxid, i samband med läsning om dessa ämnens teknologi.

Ämnen för de obligatoriska laborationerna i R III:4 och R II:3 torde kunna tagas ur ovanstående förslag. Bäst lämpa sig väl de oorganiska synteserna.

Ring IV: 4 och III: 3

a) Experimentellt enskilt arbete.

Kursen i dessa ringar upptager bl. a. en utvidgad kurs i organisk kemi, och organiska syntéser erbjuda sig därför osökt som ämnen för det enskilda arbetet. För de flesta av nedan föreslagna synteser lämnas en utmärkt handledning i L. Orthner—L. Reicher, Organisch-chemisches Praktikum, Verl. Chemie, 1929. Som ledande principer vid val av organiska synteser i skolan kan man uppställa följande satser:

1. Inga synteser, där eter, bensol, stora mängder alkohol eller andra organiska vätskor användas som lösningsmedel.
2. Inga försök, som fordra natrium eller större mängder jod.
3. Inga komplicerade apparater, vartill icke räknas enkla destillationsapparater, ej heller anordning för destillation med vattenånga.
4. Inga diazoteringar.
5. Inga teoretiskt alltför invecklade eller alltför långt utanför kursen liggande försök.

I några fall kan man sammansätta serier av genetiskt samhöriga preparat, så att man kan använda ett framställt ämne för framställning av ett nytt. Några sådana serier äro:

1. Nitrobensol → anilin → acetanilid → nitroacetanilid → p-nitranilin.
2. Monoklorättiksyra → glykokoll.
3. Etylenbromid → glykol.
4. Brombensol → dibrombensol.
5. Klorbensol → klordinitrobensol → dinitrofenol → trinitrofenol.
6. α-nitronaftalin → α-naftylamin.
7. Bensolsulfonsyra → fenol.
8. Naftalinsulfonsyra → naftol.
9. Hydrokinon → kinon.
10. Ftalimid → antranilsyra → fenylglycin-o-karbonsyra → indigo.
11. Fenylglycin → indigo.

Isolerade preparat:

Etylbromid, metyljodid, bromnaftalin, m-dinitrobensol, m-nitrobensoesyra, o- och p-nitrofenol, trinitrofenol, estrar av olika slag, urinämne.

Färgämnen, som framställas utan diazotering, äro malakitgrönt, fenolftalein, fluorescein, eosin.

Av naturprodukter kunna framställas; fettsyror och glycerin av fett, koffein ur te, kasein ur mjölk.

Kvantitativa analyser böra på grund av sitt stora uppfostrande värde ingå bland de uppgifter, som kunna väljas för det enskilda arbetet, i första hand titreranalyser, som äro de lättaste. Det ligger mindre vikt på att lära sig alla titreringsmetoder, än att genomarbeta ett område, att öva en metod för olika ämnens bestämning. Vidare torde det vara klokt att icke låta eleverna själva titerställa lösningarna; de äro i början helt ovana vid kvantitativt arbete, ställningen tar lång tid, och resultatet, varpå det fortsatta arbetet beror, blir ovisst. Man bör således lämna ut titerlösningar av känd halt. Om tiden medgiver, kan man göra en titerställning som avslutning. Här följa förslag till lämpliga titreranalyser.

Permanganattitrering:

Bestämning av järn, ferrojon direkt, ferrijon efter reduktion.
» » oxalsyra.
» » vätesuperoxid, kombinerad med en liten undersökning av ämnets katalytiska sönderdelning.
» » svavelsyrlighet, kombinerad med en undersökning av ämnets frivilliga oxidation.

Jodometri:

Bestämning av kromat, klorat, svavelsyrlighet, ferrijon. Haltbestämning av brunsten och av klorkalk.

Alkalimetri, acidimetri:

Bestämning av fria syror och baser, av alkalikarbonat.
» » ammoniumsalter efter destillation.
» » kalcium-, barium-, magnesiumkarbonat och -hydroxid som exempel på återtitrering.

Eventuellt fällningstitrering:

Bestämning av silver och av klorjon.

Ännu mer instruktiva äro viktanalyser, som böra väljas bland de enklast förekommande, ex. bestämning av järn, koppar, barium, sulfat- och kloridjon.

Tillämpade kvantitativa analyser äro följande enkla kemiskt-tekniska undersökningar, som även kunna tänkas kombinerade med litteraturstudier på det behandlade området.

Pappersundersökning (se t. ex. Chemikerkalender, någon av de senare årgångarna).

1) Tjocklek, 2) vikt pr m², 3) spec. vikt [beräknas av 1) och 2)], 4) bestämning av längd och tvärriktning, 5) sträckprov och hållfasthet, avslitningslängd, 6) fuktighetshalt, 7) askhalt, 8) limningens art (om stärkelse, djurlim, kaseinlim eller hartslim), 9) sammansättning (mikroskopisk undersökning), 10) träfrihet, 11) limfasthet, 12) fettäthet.

Undersökning av ett fett (inga prov, som fordra speciella aparater).

Bestämning av 1) spec. vikt, 2) smältpunkt, 3) syretal, 4) förtvålningstal, 5) jodtal, 6) väteabsorption (hydrering).

Födoämnesundersökningar av enklaste slag, t. ex. bestämning av torrsubstans, askhalt och fetthalt.

Av fysikaliskt-kemiska försök, lämpliga komplement till litteraturstudier, må anföras:

Bestämning av molekylvikt i gasform.
» » » » lösning, fryspunkts- och kokpunktsbestämningar.
» » lösningars elektriska ledningsförmåga.

Kolloidkemiska försök, framställning av koloida lösningar av olika typer, t. ex. ferrihydroxid, arseniktrisulfid, silver, guld. Kolloidernas utfällning, vandring i det elektriska fältet, användning av ultramikroskop.

Adsorptionsförsök med lätt bestämda ämnen, t. ex. jod, ättiksyra, bärnstensyra.

Enkla termokemiska försök, såsom bestämning av neutralisationsvärmen, lösningsvärmen.

b) Enskilt studiearbete.

Valda kapitel ur någon större lärobok i organisk kemi (Widmans lärobok), eventuellt kombinerade med ett par organiska synteser inom dessa kapitel.

Valda kapitel av fysikalisk kemi t. ex. ur Ramberg, Den kemiska analysens teori, eller Walker, Einführung in die physikalische Chemie, eventuellt kombinerade med försök, t. ex. en serie molekylviktsbestämningar i gasform eller i lösning.

Valda kapitel ur någon icke alltför svår framställning av radioaktiviteten och atomteorien.

Valda kapitel av organiskt-kemisk teknologi t. ex. jäsningsteknik, cellulosakemi, explosivämnen, garvning, torrdestillation.

c) Ämnen för de obligatoriska laborationerna i den högsta ringen torde kunna tagas ur ovanstående förslag. Enkla organiska synteser och kvalitativ analys synas mest lämpade.

Latingymnasiets timplan upptager 1 laborationstimme i den högsta ringen. Syntes av metallföreningar torde här stå i närmaste samband med kursen i övrigt.

Bestämning av konstanten i Joules lag med en kalorimeter av massiv koppar.

I tidskriftens decemberhäfte 1929 har undertecknad beskrivit en kalorimeter av massiv koppar och hur den användes vid bestämning av tennets smältvärme. Här nedan skall en redogörelse lämnas för en bestämning av konstanten i Joules lag med samma kalorimeter.

I kalorimeterns koniska urborrning placerades en väl passande massiv kopparkon försedd med 0,2 mm djup spiralformig ränna, i vilken var inlagd en 0,1 mm tjock, isolerad konstantantråd. Dennas ena ände stod i metallisk kontakt med kopparkonen. Trådens andra ände var förbunden med en från kopparkonen

isolerad klämskruv. Kalorimetern avkyldes till några grader under rumstemperaturen, placerades på tre små korkstycken och omgavs med bomull. Temperaturen avlästes med en i 0°,1 graderad termometer, placerad såsom förut i en särskild urborrning. Då en jämn temperaturgång erhållits, slöts en ström genom konstantantråden. Spänning, strömstyrka och tid avlästes på kontrollerade mätinstrument. Efter strömbrottet inväntades temperaturutjämning.

Tabell 1.

Tid i min.	Temp.	
0	12°,80	
	12°,81	
1	12°,83	
	12°,85	
2	12°,87	Beg. temp.
	13°,20	Strömslutning
4	13°,95	
	14°,90	
6	15°,95	
	17°,00	
8	18°,05	
	19°,10	Strömbrott
10	19°,90	
	20°,22	
12	20°,35	
	20°,38	
14	20°,40	Sluttemp.
	20°,40	
16	20°,39	

I tabell 1 återges en sådan försöksserie, utförd vid en rumstemperatur av 17°,3 med en kalorimeter vägande 1786 g. Spänningen var 24,6 volt och strömstyrkan 0,501 amp.; strömmen var sluten 421 sek. Av tabellen framgår, att temperaturhöjningen blev 7°,53. Användes det vid 17° gällande värdet på koppars specifika värme, nämligen 0,0912, erhålles följande värde på konstanten k i Joules lag

$$k = \frac{0{,}0912 \,.\, 1786 \,.\, 7{,}53}{24{,}9 \,.\, 0{,}501 \,.\, 421} = 0{,}234.$$

Ytterligare några bestämningar hava utförts med samma kalorimeter. De därvid erhållna resultaten finnas införda i tabell 2. Rumstemperaturen var vid dessa försök 17°,2.

Tabell 2.

V volt	I amp.	Tid sek.	Beg.-temp.	Slut-temp.	Temp. för-höjning	k gkal/ws
12,5	0,250	541	15,40	17,93	2,53	0,244
13,0	0,260	242	16,50	17,70	1,20	0,239
24,6	0,500	267	12,45	17,27	4,82	0,239
24,6	0,500	300	13,66	18,96	5,30	0,234
49,1	0,995	121	12,99	21,50	8,51	0,234
49,2	0,999	152	9,84	20,80	10,96	0.239

Korrektion för temperaturutbytet med omgivningen har ej utförts. På ett elementärt stadium kan ej denna fråga kvantitativt behandlas.

Folke Gunneson.

Om en matematisk studentuppgift.

Den sista uppgiften i matematikskrivningen å latinlinjen v. t. 1929 hade följande lydelse:

I en triangel ABC betecknas sidorna med a, b, och c så, att a är den sida, som står mot vinkeln A, o. s. v. Visa, att om vinkeln B är 60° större än vinkeln C, så är

$$(b^2 - c^2)^2 = a^2(b^2 + c^2 - bc).$$

I juninumret 1930 av denna tidskrift finns en lösning av denna uppgift, undertecknad C. E. B. Lösningen är både intressant och elegant, men inte vill jag åta mig att locka fram den ur en skolpojkes hjärna — och det var väl heller inte meningen. Tidskriftens ursprungliga lösning är besvärlig. Jag brukar dra exemplet så här, om det möjligen kan roa. Då vinkeln B är 60° större än C, så måste B delas upp i 2 delar, en $= 60°$ och en $= C$. Men det kan ske på två sätt, *och båda måste diskuteras!* Sättes 60-gradersvinkeln utefter AB, fås en likbent triangel, som dock visar sig svårhanterlig; sättes den däremot utefter BC, så erhålles en triangel ABD (D ligger då på AC), likformig med den givna och med en sida bekant. Det måste vara det rätta. Då fås $BD = \frac{ac}{b}$, $AD = \frac{c^2}{b}$ och $CD = \frac{b^2 - c^2}{b}$. Så tillämpa vi cosinusteoremet på triangeln BCD och få: $\frac{(b^2 - c^2)^2}{b^2} = a^2 + \frac{a^2 c^2}{b^2} - \frac{a^2 c}{b}$ d. v. s. $(b^2 - c^2)^2 = a^2(b^2 + c^2 - bc)$.

Bengt E. Nyström

En ny vindmätare.

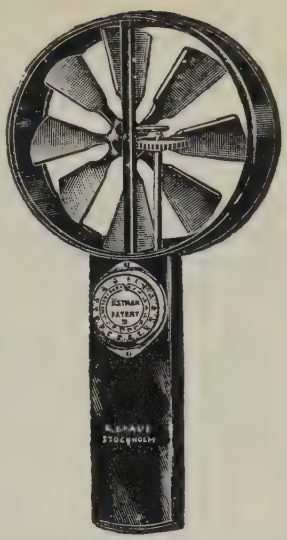
Då det gällt att konstruera apparater för mätning av vindens styrka ha olika principer blivit tillämpade[1]. De allra äldsta instrumenten voro inrättade för uppmätning av det tryck, som vind av viss styrka åstadkommer på en platta av given storlek. Senare har man utnyttjat antingen den tryck- och sugverkan uti pitotrör, till vilken vinden ger upphov, eller den av luftströmmen orsakade rotationen hos ett skål- eller bladkors. Den vindmätaretyp, varom här är fråga, och vilken utexperimenterats av författaren, stöder sig på principen med bladkors.

En nackdel, som i regel vidlåder förefintliga handvindmätare enligt sistnämnda princip, är att räkneverkets till- och frånkoppling från drivanordningen samt dess inställning på nollläge icke kan utföras i ett och samma grepp medelst samma hand, vari apparaten under mätningen hålles, en nackdel som ofta vållar olägenhet, emedan ett ur lämpligen bör hållas i den andra handen; vid vindhastighetsmätningar gäller det nämligen att bestämma vindvägen under viss tid. Man bör bl. a. ha möjlighet att utan omständigare handrörelser eller omställningar omedelbart kunna igångsätta ny mätning, därest den påbörjade av någon anledning blivit avbruten. Föreliggande konstruktion avser att bereda denna möjlighet samt att undanröja ovannämnda olägenheter. Den egentliga svårigheten vid lösandet av detta problem har således bestått i att åstadkomma så stora förenklingar, — utan att åsidosätta tillförlitligheten och hållbarheten — att handhavandet skulle bli det enklast möjliga, varjämte en icke oviktig avsikt varit att nedbringa tillverkningskostnaden och därmed försäljningspriset. Förut i handeln gängse handanemometrar — samtliga av utländskt fabrikat — kunna nämligen icke erhållas till pris understigande 65 à 70 kr.[2]; den av förf. konstruerade kostar 20 kr.

Billiga termometrar, barometrar och fuktighetsmätare etc. finnas redan. För ringa kostnad kan man nu genom att anskaffa en vindmätare komplettera den för meteorologiska iakttagelser behövliga utrustningen, vilket bör vara av intresse icke minst för våra skolmän.

[1] Det väsentligaste härom kan närmare inhämtas i en avhandling »Om vindskalor och vindmätare i svensk meteorologi» av *C. J. Östman*, Medd. från Statens Meteorologisk-Hydrografiska Anstalt. Band 4, n:o 6.

[2] Tillverkas av Rudolph Grave A.-B., Stockholm.



Handvindmätarens huvuddelar äro: ramen, bladkorset och skaftet (se fig.). Inom ramen, vilken utgöres av ett i cirkel slutet band, befinner sig det roterande bladkorset, bestående av ett antal i bestämd vinkel vridna blad. Rotationen hos detta överföres till ett räkneverk, vars visare befinner sig under glasskydd på skaftets plana framsida. Om räkneverket varit inkopplat under jämt en minut, anges på en skala vindhastigheten i meter per sekund. Genom en knapp på skaftets rundade baksida kan visaren inställas på skalans nollpunkt eller frigöras från det roterande systemet. Icke blott för att bereda plats för denna mekaniska anordning utan även för att vid behov lätt möjliggöra vindmätarens fastsättande på en stång har mätarskaftet gjorts ihåligt. Materialet utgöres till största delen av oxiderad mässingplåt, axlarna äro av rostfritt stål, bladkorset av duraluminium, och för att ernå stor känslighet hos apparaten äro samtliga axellager mycket omsorgsfullt gjorda. — Vindmätarens vikt är 150 gram och längd 20 cm, varför den är bekväm att hantera och kan bäras i en vanlig ficka.

Vindmätarskalans gradering har utförts såväl genom teoretiska beräkningar som på empirisk väg, varvid den jämförts dels med i bruk varande vindmätare av olika typer, som antingen varit uppställda i det fria eller i vindkanal, dels har den s. k. karusellmetoden kommit till användning. En genomgående proving av den sålunda erhållna skalan har sedermera utförts vid Aerodynamische Versuchsanstalt i Göttingen, där avläsningarna gjorts med en noggrannhet uppgående till hundradelar av tavlans skaldelar. Intervallen mellan de olika delstrecken äro lika för hela skalan med undantag av skaldelen från 0 till 1, där avståndet är något, om än obetydligt större. Tavlans gradering är utförd upp till 26 meter per sekund. I detta sammanhang må nämnas, att medelvindstyrkan i Sverige är 5 à 6 m/sek, ävensom att de låga vindstyrkorna äro vanligast förekommande; sålunda inträffar vid svenska inlandsstationer styrkan 20 m/sek i medeltal blott 8 gånger på 1000 observationer. Genom att inkoppla räkneverket under

en halv minut och fördubbla skalavläsningen kan man vid behov mäta hastigheter större än 26 m/sek.

Att man vid denna vindmätare kan avläsa hastigheten direkt i meter per sekund innebär en avsevärd fördel framför andra handanemonetrar, vilka fordra en tabell eller ett diagram, varur vindhastigheten beräknas efter varje särskild avläsning.

Mellan nyssnämnda mått på vindhastigheten och den genom uppskattning efter viss skala bestämda vindstyrkan äger nedanstående samband rum, vilket efter ett flertal undersökningar blev fastställt år 1926 genom internationell överenskommelse.

Vindstyrka i Beaufort grader	Vindhastighet		Benämning	
	i meter pr sekund	i knop	till lands	till sjöss
0	0 — 0.5	0— 1	lugnt	stiltje
1	0.6— 1,7	1— 3	nästan lugnt	nästan stiltje
2	1.8— 3.3	4— 6	svag vind	lätt bris
3	3.4— 5.2	7—10	måttlig vind	god bris
4	5.3— 7.4	10—14	svag blåst	frisk bris
5	7.5— 9.8	15—19	frisk vind	styv bris
6	9,9—12.4	19—24	blåst	hård bris
7	12.5—15.2	24—30	stark blåst	styv kultje
8	15.3—18.2	30—35	hård blåst	hård kultje
9	18.3—21.5	36—42	halv storm	halv storm
10	21.6—25.1	42—49	storm	storm
11	25.2—29.0	49—56	svår storm	svår storm
12	över 29.0	över 56	orkan	orkan

Då hastigheten en knop, d. v. s. 1852 meter i timmen utgör 0,51 meter per sekund, erhåller man vindens hastighet omräknad i knop — med endast 2 % fel — genom att fördubbla skalavläsningen (m/sek). Genom att t. ex. göra en avläsning dels vid gång i rak motvind, dels vid stillaliggande kan man medelst vindmätaren bestämma en båts fart, såsom närmare framgår av ett prospekt, som medföljer apparaten.

Vid användning av vindmätaren bör man tillse, att den placeras tillräckligt fritt från föremål, som kunna hindra vindens rörelse. Man bör för övrigt ihågkomma, att vindstyrkan ökas med höjden över marken samt att vinden sällan är jämn utan mer eller mindre byig, varför några bestämningar böra göras och medeltalet beräknas.

C. J. Östman.

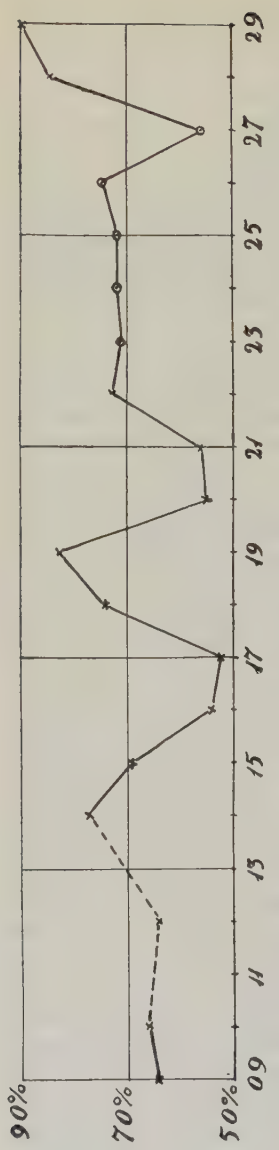
Bokanmälningar.

Einar Wetterwik, *Matematiska uppgifter* i de skriftliga realskolexamina v. t. 1907—v. t. 1930 med parallelluppgifter och svar till originaluppgifterna. C. E. Fritzes förlag, Stockholm 1930, 64 sid., kr. 1: 20.

Samlingen innehåller i *ett häfte* samtliga hittills givna originaluppgifter (utom ht:s 1930 och vt:s 1931) i kronologisk ordning jämte svar. Dessutom har utg. i vart och ett av dessa originalexempel infört vissa inom parentes satta siffervärden, avsedda att kunna ersätta originaluppgifternas, då lärare önskar till provräkning giva realskolexamensproblem utan olägenhet därav, att svaren till dessa finnas publicerade. De i häftet förekommande uppgifterna, originalen och de motsvarande s. k. parallelluppgifterna, kunna av *skolor och lärare* vid rekvisition direkt från förlaget även erhållas på *lösa blad*, med varje kalenderårs skrivningar på sitt särskilda blad, i buntar om 40 lika blad à 1: 50 kr. per bunt. Svar till parallelluppgifterna till ett pris av 1 kr. kan på samma sätt av *lärare* rekvireras.

De här ovan refererade, av utg. vidtagna anordningarna synas huvudsakligen vara motiverade därmed, att svaren till originaluppgifterna finnas tillgängliga i handeln även för lärjungarna. Anm. kan för sin del icke finna denna olägenhet så betydande, att den försvarar en så stor apparat. Originaluppgifternas redan nu stora och alltjämt växande antal minskar automatiskt risken av att använda dem vid prov i oförändrat skick. Bli W:s s. k. parallelluppgifter mera allmänt använda, sprida sig svaren till dem också snabbt bland abiturienterna, och då blir utg. nödgad att åter komponera nya »parallellsiffror» till samtliga äldre årgångar skrivningar. Allt detta arbete synes anm. så mycket mera onödigt, som ju svårigheten i realskolexamensuppgifterna ytterst sällan ligger i de rent numeriska räkningarna.

De »lösa bladen» torde ej heller komma att få så stor användning, som utg. sannolikt tänkt sig. Vid det ojämförligt största antalet provräkningar kan det ju ej bli tal om att förelägga lärjungarna en förut given hel examensskrivning, utan ett urval av lämpliga uppgifter från flera årgångar måste då göras.



Detta skulle i hög grad ha underlättats, om utg. disponerat stoffet ur innehållssynpunkt eller åtminstone låtit ett systematiskt register inflyta i häftet. Ett sådant skulle dessutom visa, att icke alla områden för förut givna realskolexamensproblem tarva tillökning i form av »parallelluppgifter». Tvärtom äro en del kursområden rikligt tillgodosedda i förut givna skrivningar, andra mycket sparsamt, vilket icke minskar risken för att problem på de senare plötsligt kunna dyka upp igen. Fördenskull hade det varit tacknämligt, om utg. ställt sin stora erfarenhet och kända kompositionsförmåga till tjänst för att berika problemsamlingen även på andra sätt än genom införandet av »parallellsiffror», förslagsvis genom utbyte av kända och efterfrågade storheter, genom sammanslagning av ex. HT 07: 8, HT 29: 7 orig.- och parallelluppg. (+ tillägg av 45°) eller på andra liknande sätt.

En intressant nyhet, för vilken matematiklärarne i realskolans avslutningsklasser helt säkert skola skänka utg. sitt tacksamma erkännande, är hans med ospard möda ur Skolöverstyrelsens till största delen ej offentliggjorda statistik hopsamlade och i häftet införda uppgifter om *procenten av i räkneproven godkända examinander* i hela riket samtliga vårterminer (utom 1907, 08, 11, 13 och 30). För överskådlighetens skull hava de här införts i ett diagram, som ger en god bild av, hur svårighetsgraden varierat.[1] Det kan måhända ge höga vederbörande anledning till självrannsakan vid realskolexamens snart stundande kvartssekeljubileum.

M. E. Wahlgren.

[1] Cirkelpunkterna i diagrammet anger, att privatister ej medräknats.

Berg-Hagström, *Räknelära för allmänna läroverk och flickskolor*, omarbetad av lektor Elis Hjalmar. C. E. Fritzes Bokförlag, Stockholm 1931. Första delen, 8:de uppl., 224 sid., andra delen, 10:de uppl., 215 sid. Kart. kr. 2: 30 per del, facit 50 och 30 öre. — I särtryck, 76 sid., häft. 1: — : Räknelära för den fyraåriga realskolans och kommunala mellanskolans första klass.

Berg-Hagströms räknelära har nu utkommit i ny upplaga, omarbetad av lektor Hjalmar. Materialet har omordnats efter de nya kursplanerna och exemplen fått genomgående numrering. En del kapitel ha fått en välbehövlig utökning av antalet exempel, och en del kapitel ha omredigerats, utan att boken dock på något sätt mist sin forna karaktär. Ma det ur den synpunkten tillatas mig att fatta mig kort — boken torde vara både känd och välkänd.

Särtrycket, avsett för den 4-åriga realskolans första klass, borde enligt anmälarens mening innehållit en repetitionskurs i decimalbråk och även en del exempel på hela tal. All erfarenhet tycks mig tala för att även den saken behöver repeteras. Eller talar lektor Hjalmars egen erfarenhet möjligen i motsatt riktning?

Jag har roat mig med att jämföra den nya upplagan med en gammal (från 1908) och funnit att de använda prisuppgifterna i stor utsträckning äro de samma. Intet tycks ha fördyrats sedan dess utom arbetares löner (i ex. 2770 får dock en arbetare fortfarande 2 kr. per dag). Antraciten kostar 3 kr. per hl., potatisen 4 kr. 20 öre; kräftorna kosta 75 öre per tjog (o, du gamla goda tid!) och russinen 1 kr. 8 öre per kg. för att nu ta några stickprov. Av en nyutkommen upplaga, som ej kan användas jämsides med de gamla, kan man väl ha rätt att kräva lämpligare sifferuppgifter. Det finns dock lärare, som tillhalla eleverna att tänka efter, om ett erhållet resultat kan anses rimligt. Här borde utgivaren gjort sig mera besvär. Egendomlig verkar också upplysningen, att en 16-ljus volframlampa i Linköping kostar 3: 30 kr. per år. Är det sant?

Ordet järnbanetag tror jag tillhör det förflutna. Eller anser utgivaren att järnväg är vårdslös och otillåten slang?

Punkter efter förkortningar sådana som *m* och *kg* skulle jag rekommendera till borttagande. Här få väl vi matematici rätta oss efter herrar fysici, helst som reformen är praktisk.

Bengt E. Nyström.

Från kunskapens fält, P. A. Norstedt & Söners förlag.

Under detta namn ha Oscar Augzell och Nils Olsson börjat utgiva en serie små, prisbilliga häften (à 80 öre), innehallande

skildringar från olika ämnesområden. Varje häfte utgör ett avslutat helt. Sålunda skriver kapten Stellan Wulff om »En atlantresa» (60 sid.), företagen med ett modernt svenskt motorfartyg. Vid sidan av en tydligen autentisk skildring av det dagliga livet ombord på en atlantångare får författaren tillfälle att lämna historiska och geografiska upplysningar av stort intresse, och när han för läsaren upp på kommandobryggan, finnes där en hel del att säga om navigation och många instrument att beskriva, såsom den magnetiska kompassen, gyroskopkompassen, loggar, sextanter, ekolodet och radiopejlingsapparaterna.

Generaldirektör Erik Hägg skildrar i häftet »Vid våra lots- och fyrplatser» (56 sid.) med sakkunskap utvecklingen av lots- och fyrväsendet, redogör för fyrar, fyrskepp och lysbojar, numera allmänt utrustade med Gustaf Daléns geniala uppfinningar, klippljusapparaten, solventilen, glödnätsutbytaren m. fl., samt berättar om lotsarnas och fyrmännens strävsamma liv och hårda arbete, om deras upplevelser och äventyr.

Civilingenjör Erik Carlberg ger i ett annat häfte, »Hur en modern bil kommer till« (56 sid.), en inblick i arbetet vid en modern svensk automobilfabrik och följer därvid en bils tillkomst alltifrån konstruktionsarbetet på ritkontoret till slutmonteringen och avsyningen.

»Boliden — ett svenskt Klondyke» (62 sid.) är slutligen den lockande titeln på ett av redaktör Ivar Frick författat häfte, som huvudsakligen ägnats den rika malmfyndigheten Boliden i Västerbotten. Författaren, som haft tillfälle att personligen följa hela utvecklingen, redogör till en början för olika malmletningsmetoder, bl. a. de av svenska ingenjörer uppfunna elektriska metoderna, och skildrar sedan, hur malmfältet vid Boliden påträffades, och huru här mitt i ödemarken ett stort gruvsamhälle växt upp. Ett särskilt tack förtjänar författaren för sin avskräckande skildring av slagrutemännens verksamhet, ett värdefullt bidrag till kampen mot slagrute-vidskepelsen. Betecknande är ju, att ingen av de däruppe flitigt verksamma slagrutemännen lyckats påvisa en enda malmfyndighet, fastän Skelleftefältet visat sig innehålla vårt lands största tillgång av koppar-, guld- och arsenikmalmer.

Utgivandet av dessa små monografier innebär ett mycket gott uppslag till läslustens främjande. En diger lunta verkar, som vi veta, ofta avskräckande, men dessa trevligt utstyrda och utmärkt väl illustrerade små häften maste tvärtom locka till läsning. Utgivare och förlag äro sålunda att lyckönska.

Ernst Herlin.

Kunskap, Universitet för alla. Del IV (Matematik, astronomi, fysik, kemi, geologi, mineralogi, metereologi), Albert Bonnier, Stockholm 1929, 494 sid., häft. kr. 14: 50, hfr. kr. 19: —.

Denna »handbok i vår tids humanistiska och naturvetenskapliga vetande» innehåller en del (IV) av speciellt intresse för denna tidskrifts läsare. Doktor Hagströms framställning av matematiken har här refererats tidigare (årg. 13, sid. 38). Den följes av en av fil. d:r Sten Asklöf författad avdelning, *Astronomi,* vilken kan rekommenderas dem, som med rätta finna skolans astronomikurs väl knapp och önska tränga djupare in i det för vår fantasi så lockande ämnet.

Liksom astronomien utgöra geologi, mineralogi och meteorologi endast ganska ofullständiga moment i våra gymnasiers kemi- och fysikkurser. De i föreliggande handbok av professorerna Lennart von Post (geologi) och Gregori Aminoff (mineralogi) samt överdirektör Axel Wallén (meteorologi) skrivna översikterna av dessa vetenskaper böra ihågkommas, när man vill anvisa litteratur åt dem, som önska en grundläggande, sammanfattande kunskap i något av dessa ämnen.

Handboken innehåller även en avdelning, betittlad *Fysik och kemi,* vilken författats av fil. lic. Anna Beckman. Av de båda närbesläktade vetenskaperna behandlas först kemien i en kortfattad framställning, som ger läsaren de kemiska grundbegreppen, det viktigaste om kemiska reaktioner, en kort översikt av grundämnena med periodiska systemet som utgångspunkt samt huvuddragen av den organiska kemien. Därefter följa olika delar av fysiken: mekanik, värmelära, elektricitet och magnetism. Den strålande energien behandlas med större bredd, så att kvantateorien, Bohrs atomteori, Comptoneffekten och de Broglies materievågteori kunna beskrivas.

Sedan sålunda kemi och fysik varför sig behandlats, går förf. in på den nya vetenskapsgren, atomfysiken, där de båda vetenskaperna kunna sägas bli förenade till en. I anslutning härtill avhandlas kristallernas byggnad och nyare teorier för de kemiska valenserna.

Avdelningens sista kapitel visar, hur Einsteins relativitetsteori uppkom, antyder dess innebörd men framhåller också, hur svag den experimentella grund ännu är, varpå teorien vilar, även om den, matematiskt sett, är oantastlig.

Samtliga här omnämnda uppsatser äro av så hög kvalitet, att de alla förtjänat en utförligare redogörelse. Att här endast doktor Beckmans avdelning ägnats en sådan sammanhänger med att

hennes uppgift säkerligen varit den svåraste. Den har dock lösts på ett utomordentligt sätt, ty på det begränsade utrymmet har det synnerligen omfattande ämnet fått en visserligen koncentrerad men det oaktat förvånansvärt lättläst och intressant framställning.

Ernst Herlin.

Läroböcker i astronomi.

C. G. Hellsten, *Experimentell fysik och astronomi. Del III.* 5:te upplagan. Svenska bokförlaget, Stockholm 1931. 115 sid., varav astronomi sid. 40—96, kart. kr. 2: —.

C. Lundahl. *Lärobok i astronomi.* C. E. Fritzes Bokförlag, Stockholm 1931, 130 sid.; med stjärnkarta, häft. kr. 2: 50, kart. kr. 3: —.

Ivar J:son Malmborg, *Lärobok i astronomi.* Särtryck ur Fysik för realskolan, del III. Svenska Bokförlaget, Stockholm 1931, sid. 42—84, häft. 90 öre.

Elis Hjalmar, *Elementär astronomi.* Särtryck ur Lärobok i fysik, Del III. Magnus Bergwalls förlag, Stockholm 1931, 58 sid.; med stjärnkarta kart. kr. 1: 50.

Ansgar Roth och F. C. Ledeboer, *Karta över norra stjärnhimmeln.* C. E. Fritzes Bokförlag, Stockholm 1930, kr. 2: —.

C. G. Hellsten. Astronomikursen är omarbetad av rektor A. Frendel, som bibehållit den förra upplagans indelning men i någon mån avkortat texten samt utbytt en del figurer mot bättre och tydligare.

Läroboken håller sig strängt till den gamla läroverksstadgans undervisningsplan, vilken tyvärr försvårat undervisningen i astronomi genom sin föreskrift, att man skall börja med det svåraste och mest invecklade, d. v. s. himlakropparnas skenbara rörelse och först efteråt övergå till företeelsernas förklaring från heliocentrisk synpunkt. Då det i ett land med vårt klimat är så gott som omöjligt att med en skolklass göra direkta observationer av den skenbara rörelsen, har resultatet blivit, att eleverna fått »torrläsa» om alla den skenbara rörelsens mysterier. Därefter få de — såsom en andra avdelning i astronomikursen — en överblick av vårt solsystem och övriga himlakroppar. Stadgans föreskrift om den skenbara rörelsens förklaring ur heliocentrisk synpunkt, som skulle innebära en upprepning av hela den första delen av kursen, har sedan på grund av bristande tid mycket dåligt medhunnits. I de nya läroböckerna i astronomi visar sig också en tendens att få in Kopernikus lära så tidigt

som möjligt. För egen del tror jag, att mycket skulle vinnas, om man toge steget fullt ut och började med solsystemet ur heliocentrisk synpunkt. Pedagogiskt sett är det ingenting som hindrar, isynnerhet som lärjungarna redan från geografikursen i första klassen böra känna jordklotets form och rörelse i världsrymden. Genomgången av den skenbara rörelsen kunde sedan ske i samband med dess förklaring ur heliocentrisk och geocentrisk synpunkt.

C. Lundahl. En utförlig lärobok med klar och redig framställning och försedd med en mängd förklarande figurer och bilder. Tyvärr är den enligt läroverksstadgan anslagna tiden för astronomiundervisningen för kort för att medgiva en så pass utvidgad kurs, som boken avser. Därtill kommer att för flertalet av lärjungarna på det åldersstadium, där astronomiundervisning förekommer i läroverken, förmågan att se i perspektiv ej nått den utveckling, som är nödvändig för fullt förstående av en del av figurerna. Med stor fördel kan emellertid boken rekommenderas för sådana lärjungar, vilka utöver skolkursen vilja bedriva astronomiska studier på egen hand.

I. Malmborg. Av största betydelse vid all undervisning är en lärobok, som innehåller koncisa och lättfattliga uppgifter i trevlig form om just det, som skall inhämtas, och därutöver helst ingenting. En lärobok bör vara en lärobok och icke en uppslagsbok, en sak, som ofta förbisetts av hrr läroboksförfattare, isynnerhet då det gällt astronomi. I föreliggande bok har förf. emellertid lyckats synnerligen väl med sovringen av det vidlyftiga materialet och inom den trånga ramen av 43 sidor fått med det viktigaste. Boken är väl försedd med åskådliga figurer och illustrationer och kommer säkerligen att visa sig mycket lämplig vid astronomiundervisningen i realskolans avslutningsklass och i gymnasiet.

E. Hjalmar. Såväl i fråga om innehåll som bildmaterial kan denna lärobok anses som en av de bästa nuvarande läroböckerna i astronomi. I väl avvägd omfattning ha även de senaste undersökningarna om universums byggnad medtagits.

Roth—Ledebour. Denna stjärnkarta är utarbetad efter delvis nya principer. De förut gängse sammanbindningslinjerna mellan de ljusstarkaste stjärnorna ha utelämnats och ersatts med de av astronomiska unionen fastställda gränserna mellan stjärnbilderna. Vintergatan har med stor omsorg inlagts och avbildats i riktig ljusstyrka i enlighet med de senaste årens undersökningar. Vari-

abla och dubbel-stjärnor ha på ett särskilt sätt markerats på kartan. En anmärkning mäste emellertid riktas mot urvalet av de markerade dubbelstjärnorna, vilket gjorts fullständigt godtyckligt och delvis även felaktigt. Många av de för amatörastronomen intressantaste och vackraste objekten ha ej markerats och andra, som ej kunna observeras utan de kraftigaste teleskop, ha medtagits. Bortsett härifrån kan kartan rekommenderas för alla astronomiskt intresserade och i synnerhet till alla skolbibliotek.

A. Jenvall.

Albin Zachrison, *Exempel till funktionsläran och analytiska geometrien.* C. E. Fritzes bokförlags aktiebolag, Stockholm 1930. 118 sid., inb. kr. 2,90.

Samlingen innehåller ej mindre än 903 ex. De flesta synas vara väl valda och synnerligen lämpade för våra realgymnasier. Boken torde såsom den är uppställd utan vidare kunna sättas i händerna på elever, vilka önska träna sig i problemlösning. Exemplen torde möjligen komma till användning vid det enskilda arbetet. En flyktig granskning tyckes ge vid handen, att problemen äro lyckligt formulerade och svaren korrekta. I ex. 389 och liknande torde väl underförstås, att a-värdet skall vara ändligt, vadan $a = \infty$ bör bortfalla i svaret. S. *Bågman.*

David Fog og Fr. Fabricius-Bjerre, *Matematiske opgaver.* Examensopgaver ved faglærer- og faglærerindeeksamen. H. Aschehoug & Co. København 1930, 48 sid. kr. 1: 50.

En del av dessa exempel ligga över kursen för studentexamen på reallinjen. Boken torde av detta skäl lämpa sig blott för en eller annan elev samt naturligtvis för läraren, som har tillfälle att gallra och hämta uppslag. En olägenhet är att svar saknas. Man kan med skäl fråga, vari utgivarnas arbete egentligen bestått, då de underlåtit en så viktig sak som bifogande av facit.

S. Bågman.

Gradualavhandlingar.[1]

Sven Benner, *Über die Eigenschwingung freier Elektronen in einem konstanten Magnetfeld,* Stockholm 1931, 75 sid. Disputation vid Stockholms Högskola den 26 maj 1931. Opponenter: docent G. Ising och amanuens E. Fredlund, Stockholm.

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

Fria elektroner i ett homogent magnetfält röra sig som bekant med likformig hastighet längs en skruvlinje. Antalet omlopp per sekund är oberoende av begynnelsehastighetens såväl riktning som storlek, så länge hastigheten icke närmar sig ljusets; det är $= \frac{e \,.\, H}{2\pi m}$. Här är $\frac{e}{m}$ elektronernas specifika laddning, $1{,}767 \,.\, 10^7 \frac{EME}{g}$ och H magnetiska fältstyrkan. Denna av det magnetiska fältet beroende egenfrekvens yttrar sig i många avseenden på samma sätt som om elektronerna vore bundna till fasta jämviktslägen genom en kvasielastisk (mot avståndet till jämviktsläget proportionell) kraft och på grund av denna hade en av den kvasielastiska kraften bestämd egenfrekvens. I båda fallen kunna elektronerna komma i resonans med ett yttre elektriskt växelfält med frekvens överensstämmande med egenfrekvensen. På grund av resonansfenomenet får ett av elektroner uppfyllt medium i båda fallen ett absorptionsband i omgivningen av egenfrekvensen och i samband därmed anomal dispersion; fig. 1 visar, hur dielektricitets konstanten och ledningsförmågan variera med egenfrekvensen, då fältets frekvens hålles konstant. Brytningsindex och absorptionskoefficient, vilka som bekant nära sammanhänga med nyssnämnda storheter, uppvisa som funktion av våglängden, då egenfrekvensen hålles konstant, ett likartat förlopp.

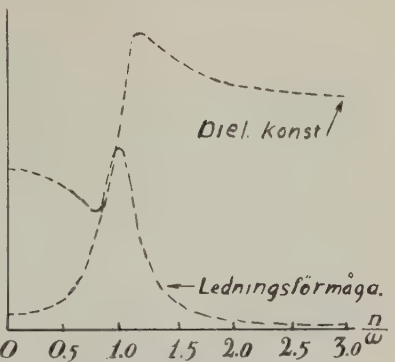


Fig. 1. Ledningsförmåga och dielektricitetskonstant som funktion av förhållandet mellan elektronernas egenfrekvens och fältets frekvens.

Det magnetiska resonansfenomenet har en särskild betydelse på grund av att det jordmagnetiska fältet, vars totalintensitet rör sig om 0,5 gauss, ger elektroner en egenfrekvens motsvarande en våglängd om c:a 200 m. Om, som alla tecken tyda på, fria elektroner finnas i stort antal i atmosfärens högre lager, det s. k. Heavisideskiktet, så har man en enkel förklaring till de dåliga mottagningsförhållandena på stora avstånd för vågor på omkring 200 m; de bero helt enkelt på det nyssnämnda absorptionsbandet. Emedan elektronernas svängningar störas vid varje sammanstötning med en gasmolekyl, blir resonansfenomenet mest utpräglat och ab-

sorptionsbandet skarpast och mest intensivt, om elektronerna röra sig i en mycket förtunnad gas.

I föreliggande avhandling ger författaren först en kritisk redogörelse för de teoretiska och experimentella arbeten, som utförts beträffande ioniserade gasers dielektricitetskonstant och ledningsförmåga såväl med som utan magnetiskt fält. De talrika arbeten, i vilka de så vunna resultaten tillämpas på radiovågornas utbredning, beröras dock icke. Med ledning särskilt av den teori för metallernas elektriska ledningsförmåga, som Niels Bohr utvecklat i sin doktorsavhandling 1911, beräknas formler, som gälla vid närvaro av ett magnetiskt fält och för en Maxwellsk hastig-

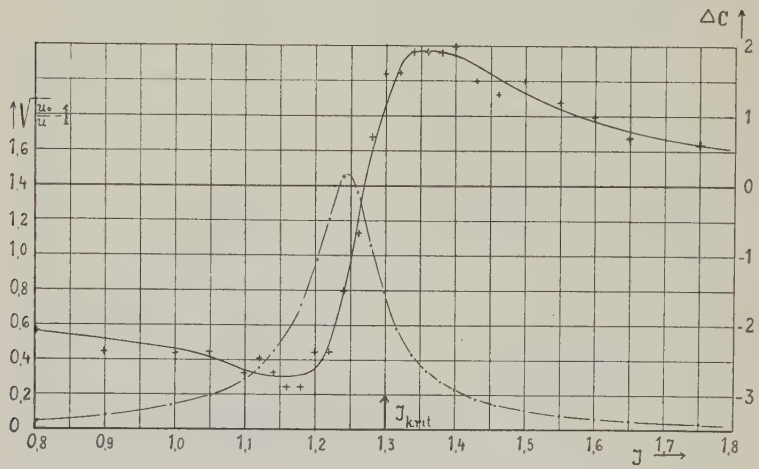


Fig. 2.

hetsfördelning bland elektronerna. Skillnaden mellan de så funna formlerna och de, som tidigare härletts under antagande att alla elektroner ha lika hastighet, diskuteras.

I nästa kapitel beskrives en försöksanordning för prövning av teorien. En elektronrörsoscillator för c:a 5 m våglängd inducerar svängningar i en resonanskrets, i vilken ingår försökskondensatorn, två parallella kopparplattor i ett glasrör, som evakueras och fylles med helium, neon eller argon av några hundradels millimeters tryck. Elektroner från en glödkatod inträda i rummet mellan plattorna genom hål i den ena av dem. Genom elektronernas närvaro ändras resonanskretsens egenfrekvens och dekrement, vilket konstateras genom att upptaga en resonanskurva med hjälp av en induktivt kopplad kristalldetektor och galvanometer.

Försöksröret är omgivet av två stora spolar för att elektronerna skola kunna påverkas med ett magnetiskt fält. Av praktiska skäl varieras icke det yttre växelfältets frekvens utan i stället elektronernas egenfrekvens genom variation av magnetfältet. Fig. 2 ger ett exempel på de erhållna kurvorna. Som abscissa står strömstyrkan i magnetspolarna. Det värde på denna, som enligt teorien skulle giva resonans, betecknas med I_{krit}. Som ordinata står en mot kapacitetens ändring resp. ledningsförmågan proportionell storhet. Kurvorna överensstämma såväl i stora drag som beträffande flera detaljer med teoriens fordringar. En närmare granskning av deras form visar, att författarens formler i vissa avseenden stämma bättre än äldre formler.

Vissa egendomliga fenomen observeras dock även, vilka icke förklaras av någon hittills uppställd teori. Hit hör en tämligen stor förskjutning av ledningsförmågans maximum från det teoretiska abscissvärdet I_{krit} samt olika storheters inflytande på denna förskjutning; vidare en i många fall uppträdande diskontinuitet hos resonanskurvorna.

De funna resultatens samband med de undersökta gasernas elektriska egenskaper samt deras beroende av olika felkällor, bl. a. väggarnas inflytande, diskuteras.

Föreläsningar för lärarkandidaterna vid provårsläroverken under läsåret 1930—31.

Göteborg: lektor A. W. Wahlund, förel. i matematik; lektor A. Björkesson, förel. om fysik å gymnasiestadiet; lektor B. E. Möller, förel. i kemi; slöjdlärare G. H. Gustafsson, Föreläsningar och övningar i framställning av fysikaliska apparater.

Lund: lektor B. Svensson, metodikföreläsn. i matematik; adjunkt Vessby, dito i geografi.

Stockholm: adjunkt O. P. Moberg, Om undervisning i kartprojektioner; adjunkt O. Eneroth, Relikter inom matematikundervisningen; lektor T. Wetterblad, Några metodiska frågor inom optiken; lektor E. Jönsson, Sifferkultur vid fysikundervisningen; adjunkt E. Löwenhamn, Demonstration av kemiska försök genom projektion; lektor Hj. Olson, Geometriundervisningen i realskolan; lektor A. Wahlgren, Några användningar av funktionsläran i fysikundervisningen; lektor E. Jönsson, Atomfysik på skolstadiet.

Uppsala: lektor B. Eriksson, Läroverkets nya lokaler för gymnasieundervisningen i fysik; adjunkt P. Granath: Läroverkets nya lokaler för undervisningen i fysik i realskolan.

Avhandlingar och uppsatser i läroverkens årsredogörelser 1930—31.[1]

Erik Almquist, *Några försvinnande drag i Stockholmstraktens växtvärld.* Östermalms h. allm. lärov.

E. Wahlberg, *Om blandningars ångtryck och destillation.* Karlstad, h. allm. lärov.

E. R. Andersson, *Något om stabilitetsförhållanden vid elektrisk drift.* Tekniska gymnasiet i Örebro.

Carl W. Nygren, *Ett bidrag till kännedomen om geografiundervisningen i Sverige före år 1905.* Kommunala mellanskolan i i Skoghall.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift. Utgiven av Svenska Kemistsamfundet, vars medlemmar erhålla tidskriftens 12 häften mot erläggande av årsavgiften till Samfundet, kr. 12: —.

Ur innehållet i årg. XLIII, 1931. N:r 1 (jan.): G. Holst, Hydrazinets användbarhet vid elektrometriska titreringar. — N:r 2 (febr.): B. Groth, Om furfurol. — N:r 6 (juni): S. Schmidt-Nielsen, Rön och erfarenheter angående fettlösliga vitaminer. — N:r 8 (aug.): G. Hägg: Övergångselementens föreningar med småatomiga metalloider. — I alla numren referat och översikter, i de flesta Meddelanden från Sveriges Kemiska industrikontor.

Populär astronomisk tidskrift. Årg. 12, 1931, dubbelh. 1—2.

Ur innehållet: K. Lundmark, Johann Kepler. — B. Lindblad, Grundämnen i solen o. stjärnorna. — Å. Wallenquist, Astronomiska o. astrolog. föreställningar bland befolkningen i ostindiska arkipelagen. — H. Mortensen, Två Tycho Brahe-minnen i Sverige. — Flere intressanta notiser.

Industritidningen Norden. Årg. 1931, h. 14—36.

Ur innehållet. Selenlikriktaren. — Junkers flygdieselmotor. — Nya uppfinningar o. fabrikat (en serie intressanta notiser). — »Cirkelns kvadratur» m. m., några notiser o. diskussionsinlägg. — Endoskopet (»ormkikaren»). — Tillverkningen av optiska glas vid Zeiss' verkstäder. — Isolatorer av »vitreosil» och »sillimanit». — Metallurgiska framsteg; Ny vit metallegering; Cupren, ett nytt poröst material. — Nya patent m. m.

[1] Uppgifterna om avhandlingar och föreläsningar ha godhetsfullt lämnats av Skolöverstyrelsens statistiska avdelning.

Era. Elektricitetens rationella användning. Årg. 1931, h. 1—8.

Ur innehållet. Glödlampor för specialändamål. — Elektrisk vattenvärmare av ny typ. — Om tröga säkringar. — Kokplattsnormerna. — Kopparlikriktare. — Moderna typer av induktionsmotorer. — Ny tystgående dammsugare. — Glödlamporna o. spänningsregleringen. — Radiostörningar o. deras avhjälpande. — Många notiser om ny materiell.

Radioamatören. Årg. 8, 1931, h. 1—8.

Ur innehållet. Norrsken o. världsrymdseko. — Radiopejling. — Detektorer o. deras verkningssätt. — Radion och polaråret 1932—33. — Undersökning av elektriska element. — Syperheterodynens utveckling. — Filtrering av nätbrus. — Radiotelegrafi med centimetervågor. — De ultrakorta vågorna o. luftfarten. — Automatisk registrering av frekvenskurvor. — Hur bedömer man ett torrbatteris kvalitet? — Nya apparattyper.

Radio och Grammofon. Årg. 9, 1931, h. 1—9.

Ur innehållet. Ur rundradions historia. — Sveriges radioindustri; en rundvandring. — Radiostörningar från starkströmsanläggningar. — Modern batterifabrikation. — Kontinuerliga svängningsalstrare. — Spänningsreglering vid nätanslutningsapp. — Vad som stör radio och vad som icke stör. — Meddelanden från tidskriftens laboratorium ang. ny materiell m. m.

Matematisk tidsskrift. København, 1931, h. 1 o. 2.

Ur innehållet i avd. *A*. Fabricius-Bjerre, Trekantskoordinater. — E. Torsting, Hvorledes kan skolens matematikundervisning bidrage till at skabe enhed i mangfoldighederne? — Kommissionsbetænkningen vedrørende det højere Skolevæsen (Diskussion med bidrag av flera förff.). — D. Fog, Nipunktscirklen. — G. Boldsen, Arealer og geometriske proportioner. — Opgaver. — Ur avd. *B*. G. M. Stensig, Om en algebraisk Kurve av 4. Orden. — D. Fog, Om plane Kollineationer med tre sammenfaldende Dobbeltpunkter. — B. Jessen, Om konvekse Funktioner og Uligheder imellem Middelværdier. — Litteraturanm.

Fysisk Tidsskrift. Aarg. 29, København, 1931, 1—3.

Ur innehållet. M. Knudsen, Luftpumper. — Hauptmann-Andersen, Om Navigation. — H. Petersen, Om Nordlysenes Højde. — N. Bjerrum, Syrer, Salte og Baser. — E. Krüger, C. V. Raman; Raman-Effekten.

Kataloger m. m.

P. A. Norstedt & Söners Skolmateriellavdelning. Firman har utsänt en ny »Specialkatalog, avd. 7. Kemi» (63 sid.), i alfabetisk ordning upptagande den materiell, som normalt behövs vid kemiundervisningen vid läroverken. Katalogen bjuder på en nyhet, säkerligen välkommen, nämligen »kemiska apparater med normalslipningar». Kolvar, destillationsrör, kranar, skarvrör m. m. levereras med standardiserad slipning (stigning 1: 10), garanterat vakuumtäta. Med hjälp av dylika delar kan en hel apparatur uppbyggas, och delar i dylika, vilka förolyckas, kunna lätt bytas mot nya. Tack vare standardiseringen behöver man ej heller vara orolig, om rördelar skulle förväxlas; de passa likafullt. — Man finner också som nyhet en ändamålsenlig degelhållare (nr 12370). En modell av gasverk (nr 12406) förtjänar även att uppmärksammas.

I »Ny undervisningsmateriell» nr 4 beskrives en förbättrad form av Hofmanns vattensönderdelningsapparat, en bekväm kopplingstavla till rörlikriktare och skolplanetariet C ö l u x, en vridbar stjärnkarta, som inrättats för projektion och som kan insättas som diapositiv i ett skioptikon (ramstorlek 14,5 × 12 cm² eller 14,5 × 13 cm²). Den är avpassad för våra breddgrader och kan under projektionen lätt vridas och ställas in på önskat datum och klockslag. Till apparaten höra tre olika diapositiv (se fjärde omslagssidan i junihäftet). — »Undervisningsmateriell», nr 5 upptar bl. a. brännare för sprit enl. Barthel, spänningsmätare (en lämpligt anordnad liten glimlampa för 100—500 volt) och en liten (med dragkedja, kugghjul och fjäder) handdriven växelströmsgenerator med sexpolig rotor (perm. stålmagneter) och sex fasta, seriekopplade spolar, allt inmonterat i en metalldosa av 9 cm diameter. Som strömindikator tjänstgör en liten glödlampa. Den lilla billiga generatorn (kr. 12) är inte att förakta, och gör, tack vare sin enkelhet, god tjänst även om man har tillgång till en större dylik. Firman tillhandahåller även generatorn, monterad tillsammans med en vattendriven Peltonturbin som drivkraft.

Ett prospekt illustrerar och beskriver (se sidan före texten i junihäftet) en verkligt rekommendabel, hopfällbar projektionsduk (storlek 50 × 68 cm² och 75 × 100 cm² à kr. 24: — o. 33: — lagerföras). Duken, som är matt-vit och fullkomligt slät, är monterad på en med fjäderupprullning försedd gardinkäpp, fastsatt på en bräda som fot. Upptill är duken fästad på en träribba, vilken vid uppdragningen automatiskt stöttas av ett par fällbara sidostöd. Hopfälld tar duken obetydlig plats

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

448) *Genom punkten (a; 0) som ligger inom cirkeln* $x^2 + y^2 = 1$, *dragas två vinkelräta kordor, vilka dela cirkelns periferi i fyra delar. Visa, att produkten av två närliggande bågars sinus har värdet* $1 - a^2$. *X.*

449) *Man betraktar de trianglar ABC med given yta, som ha en diameter AB i cirkeln K till gemensam bas. Sök orten för skärningspunkten mellan tangenterna till K i dess variabla skärningspunkter med CA och CB.* *X.*

450) *A är en godtycklig punkt på en given parabel. Normalen i A skär kurvan ytterligare i B och dess styrlinje i C. Tangenterna i A och B råkas i P. Bevisa, att* $PB \perp PC$. *X.*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.[2]

451) $16 \cos^2 x = \cot^2 x + 8 \cot^2 x + \cot x$.

Svar: $90° + n \cdot 180°$; $52°{,}5 + n \cdot 90°$; $82°{,}5 + n \cdot 90°$.

452) En liksidig triangel med sidan a vrider sig 180° kring en axel, som halverar ena sidan och är vinkelrät mot en annan. Beräkna rotationskroppens yta.

Svar: $\frac{15}{16}\pi a^2 + \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$.

453) En rätvinklig triangels hypotenusa delas av inskrivna cirkelns tangeringspunkt i delarna a och b. Visa, att triangelns yta $= ab$.

454) I vilken punkt på kurvan $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ är subtangenten kortast?

Svar: I punkterna $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ och $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 455—460 äro insända av folkskolläraren E. VIDIGSSON, Borlänge.

455) Om man i lexikografisk ordning permuterar bokstäverna *g, i, o, o, r,* vilken permutation i ordningen blir origo?
Svar: Den 45:e.

456) En punkt rör sig så, att längden av en från densamma till cirkeln $x^2+y^2+4x=0$ dragen tangent är lika med punktens avstånd från räta linjen $x+6=0$. Sök orten.
Svar: Parabeln $y^2=4(2x+9)$.

457) Linjen $y=2$ delar cirkeln $x^2+y^2=256$ i två segment. Giv ekvationen för den cirkel, som är inskriven i den inom första kvadranten belägna delen av det mindre segmentet.
Svar: $(x-6)^2+(y-8)^2=36$.

458) Diskutera kurvan $y=\dfrac{x^4-5x}{x^3-1}$.

459) Angiv maximum och minimum hos funktionen

$$y=2\sin^2 x\,.\,tg\frac{x}{2}.$$

Svar: $y_{max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; $y_{min}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

460) Beräkna det mindre segmentet, vilket begränsas av kurvan $y=x^3$ och räta linjen $y=13x-12$.
Svar: 8 ytenheter.

Lösningar till uppg. 413—416.

413) *Eliminera x, y och z ur systemet*

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}&=a\\ \frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}&=b\\ \left(\frac{x}{y}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)&=c\end{aligned}\right\}$$

A. H. P.

Hopmultipliceras de båda första ekvationerna, får man

$$\sum\frac{x^2}{yz}+\sum\frac{yz}{x^2}+3=ab.$$

Den tredje ekv. kan skrivas

$$\sum\frac{x^2}{yz}+\sum\frac{yz}{x^2}+2=c.$$

(Varje summering utsträckes över de genom cyklisk permutation erhållna storheterna). Sambandet blir alltså $ab=c+1$.

B—r.

414) *Den konvexa fyrhörningen ABCD är omskriven kring en cirkel O. Visa, att*

$$\frac{\overline{OA}^2}{AD \cdot AB} + \frac{\overline{OB}^2}{AB \cdot BC} = 1. \qquad X.$$

$\sphericalangle AOB = 180° - \frac{A+B}{2}$, och då $A + B = 360° - (C + D)$, blir $\sphericalangle AOB = \frac{C+D}{2}$. Drag linjen OE till en punkt E på AB så, att $\sphericalangle AOE = \frac{D}{2}$; då blir $\sphericalangle BOE = \frac{C}{2}$. Ur de likformiga trianglarna ADO och AOE fås $\frac{OA}{AE} = \frac{AD}{OA}$ eller $\overline{OA}^2 = AD \cdot AE$.

På samma sätt fås $\overline{OB}^2 = BC \cdot BE$ och därefter

$$\frac{\overline{OA}^2}{AD \cdot AB} + \frac{\overline{OB}^2}{BC \cdot AB} = \frac{AE + BE}{AB} = 1.$$

B—r.

415) *En likformigt föränderlig triangel glider med två av sina vinkelspetsar på en ellips. Sök orten för den tredje vinkelspetsen, om triangeln rör sig så, att sidorna ständigt förbliva parallella med var sin av tre givna riktningar.* *Iter †.*

Till koordinataxlar tagas två konjugatdiametrar, den ena, y-axeln, parallell med den rörliga ellipskordan (triangelbasen). Ellipsens ekvation är då av formen

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Koordinaterna för basens ändpunkter betecknas med $(\alpha \cos \varphi; \pm \beta \sin \varphi)$. Den tredje vinkelspetsen bestämmes av ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} y - \beta \sin \varphi &= m_1 (x - \alpha \cos \varphi) \\ y + \beta \sin \varphi &= m_2 (x - \alpha \cos \varphi) \end{aligned}\right\}.$$

Genom addition och subtraktion av dessa ekvationer erhålles

$$y = \frac{m_1 + m_2}{2}(x - \alpha \cos \varphi); \quad \beta \sin \varphi = \frac{m_2 - m_1}{2}(x - \alpha \cos \varphi).$$

På grund av y-axelns förläggning parallellt med triangelbasen omfatta dessa ekvationer alla tänkbara fall av *egentliga* trianglar, d. v. s. sådana, i vilka sidorna ha *skilda* riktningar. Av samma skäl antages $m_2 \neq m_1$. — Genom division av (2) med (3) erhålles

$$\frac{y}{\beta \sin \varphi} = \frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1}.$$

Sätta vi nu för enkelhetens skull

$$\frac{m_2+m_1}{m_2-m_1}=\lambda, \quad \frac{m_1+m_2}{2}=\mu,$$

där μ är vinkelkoefficienten för triangelmedianen från den tredje vinkelspetsen, ha vi ekvationssystemet

$$y=\lambda\beta\sin\varphi=\mu(x-\alpha\cos\varphi),$$

varur erhålles (för $\mu \neq o$)

$$\sin\varphi=\frac{y}{\lambda\beta}, \quad \cos\varphi=\frac{\mu x-y}{\mu\alpha}.$$

Ekvationen för den sökta orten blir då

$$\frac{(\mu x-y)^2}{(\mu\alpha)^2}+\frac{y^2}{(\lambda\beta)^2}=1.$$

Denna ekv. betyder en ellips, koncentrisk med den givna. (Utrymmet medger ej införandet av den vackra generalisering författaren bifogat). *Iter †.*

416) *Bestäm antalet punkter med heltalskoordinater på hyperbeln* $2y^2-x^2=1$ *inom en cirkel kring origo med radien* $r=1600$.

Iter †.

Låt $x=p$, $y=q$ vara en lösning, och låt m vara ett godtyckligt *udda* tal. Sätta vi då

$$(p+q\sqrt{2})^m=P+Q\sqrt{2}, \text{ så är } (p-q\sqrt{2})^m=P-Q\sqrt{2},$$

och vi erhålla genom multiplikation

$$P^2-2Q^2=(p^2-2q^2)^m=-1,$$

varav följer, att (P, Q) är en ny lösning. Om (p, q) är den *minsta* lösningen, kunna således övriga lösningar erhållas genom utveckling av $(p+q\sqrt{2})^m$.

Man ser genast, att hyperbeln går genom (1, 1) och att detta är den *minsta* lösningen. Sätta vi då succesivt $m=3, 5, 7, 9, \ldots$, erhålles

$$(1+\sqrt{2})^3=7+5\sqrt{2}, \qquad (1+\sqrt{2})^7=239+169\sqrt{2},$$

$$(1+\sqrt{2})^5=41+29\sqrt{2}, \qquad (1+\sqrt{2})^9=1393+985\sqrt{2}, \text{ o. s. v.}$$

Lösningarna bliva således:

x	1	7	41	239	1393	—
y	1	5	29	169	985	—

Den sist funna lösningen är redan för stor, enär den ligger på en cirkel med radien $r>1706$. Den fjärde lösningen faller där-

emot inom det angivna området. Antalet lösningar inom första kvadranten är således 4. Då varje gitterpunkt i första kvadranten motsvaras av en symmetriskt belägen i vardera av de övriga kvadranterna, så är det sökta antalet gitterpunkter således = 16.

Iter †. Även löst av *B*—*r*.

Fysikaliska uppgifter.[1]

96. En klotformig gummiballong har volymen 65 liter och innehåller torr vätgas, vars tryck, liksom det yttre lufttrycket, är 745 mm. Den är fäst vid ett snöre, vars vikt kan försummas. På grund av vinden, som förutsättes ha horisontell riktning, föres ballongen åt sidan och är i jämvikt, när snöret bildar 50° vinkel med lodlinjen. Huru stor kraft utövar vinden på ballongen? Ballongens tomvikt är 25 g. 1 liter luft av trycket 760 mm väger vid den rådande temperaturen 1,25 g, 1 liter vätgas 0,087 g.

Svar: 58,54 gf.

97. Av tunn, jämntjock, homogen bleckplåt utklippas två kvadratiska stycken, ett med sidan 2 dm och ett med sidan 4 dm, samt fyra stycken i form av likbenta parallelltrapets med de parallella sidorna 2 resp. 4 dm och höjden 2 dm. Alla sex styckena sammanfogas, så att de bilda en ihålig, stympad, kvadratisk pyramid. Var ligger dess tyngdpunkt?

Svar: På $^1/_3$ av höjden, från basen räknat.

98. Två smala, jämntjocka, homogena stänger *AB* och *CD* hava vardera vikten 10 kg och längden 8 dm. De sammanfogas i form av bokstaven *T*, så att ändpunkten *B* fästes vid mittpunkten av staven *CD* och *BA* blir mittpunktsnormal till *CD*. I punkterna *C* och *D* anbringas 5 dm långa snören och i *A* ett snöre, vars längd så avpassas, att om alla tre snörenas fria ändar fastbindas vid en krok i taket, stängerna *AB* och *CD* båda bliva horisontella. Beräkna spänningen i snörena. Den del av snörena, som åtgår för knutar, är ej inräknad i ovan angivna längder och kan således lämnas ur räkningen.

Svar: Snöret i *A* har spänningen 14,32 kgf; snörena i *C* och *D* 16,77 kgf.

99. Under världskriget beskötо tyskarna Paris med en långskjutande kanon. Den var uppställd på en ort, vars avstånd från Paris vi sätta lika med 12 mil; olikheten i höjd över havet för-

[1] Uppg. 96—106 äro förf. av lektor RAGNAR LUNDBLAD, Luleå, uppg. 107—121 av lektor TORSTEN WETTERBLAD, Stockholm.

summas. För att ernå den stora skottvidd, som behövdes, måste man tillse, att projektilen tillryggalade så stor del av avståndet som möjligt i de höga luftlagren, där luftmotståndet är litet. Man avpassade därför initialhastigheten och elevationsvinkeln så, att banan skulle bilda 45° vinkel med horisontalplanet, när projektilen passerade tiokilometersnivån. Beräkningen av projektilbanan måste i verkligheten utföras med stor precision och hänsyn tagas till luftens motstånd, tyngdkraftens beroende av höjden, jordrotationen m. m. En första överslagskalkyl kan däremot utföras med elementära medel under försummande av luftmotståndet och med användning av det konstanta värdet 9,8 m/sek² å jordaccelerationen. Beräkna på detta sätt, vilken ungefärlig begynnelsehastighet och riktningsvinkel projektilen bör ha.

Svar: Hastighet ungefär 1100 m/sek, elevationsvinkel ungefär 50° (1092 m/sek resp. 49°,73).

100. En liten kula, som väger 0,5 g, är upphängd i en fin tråd, vars vikt kan försummas, och rör sig som en konisk pendel i en cirkelformig bana, varvid snöret bildar en vinkel av 10° med vertikalen. Kulan är först oladdad, och dess hastighet i banan är då 40 cm/sek. Sedan anbringas en annan liten kula, som är laddad med 40 positiva elektrostatiska enhetsladdningar och fäst i änden av en isolerande stav, i medelpunkten av den cirkel, som den rörliga kulan nyss beskrev. Den rörliga kulan laddas likaledes med 40 positiva enhetsladdningar och bringas därpå att ånyo beskriva samma cirkel som nyss. Vilken blir då dess hastighet? Accelerationen vid fritt fall är 982 cm/sek².

Svar: 35,42 cm/sek.

101. En gasmassa, bestående av fuktig luft, har temperaturen 100° C och trycket 760 mm; den relativa fuktigheten är 70 %. Gasmassan sammanpressas, tills man erhåller en gasblandning, vars täthet är lika med tätheten av torr luft vid 0° och 760 mm. Hur stort är då trycket? En volym vattenånga väger $^5/_8$ av vad en lika stor volym torr luft väger vid samma tryck och temperatur. Gasernas volymsutvidgningskoefficient kan sättas till $^1/_{273}$.

Svar: 1323 mm.

102. En sluten behållare av kopparplåt rymmer 1 liter och väger tom 350 g. Den är fylld med vatten, som omröres med en propelleromrörare. Vattnet är varmt och får svalna. Det förflyter 500 sek, medan temperaturen faller från + 60° till + 50°. Behållaren tömmes därefter och fylles med en varm saltlösning, vars täthet är 1,14 g/cm³. Det tager nu 442 sek för temperaturfallet från + 60° till + 50°. Beräkna saltlösningens spec. värme.

Spec. värmet för koppar är 0,092 gkal/g.grad. Omrörarens vattenvärde och den värmemängd, som alstras genom omröringen, kunna försummas.

Svar: 0,7722 gkal/g.grad.

103. Ett batteri, vars elektromotoriska kraft är 4,10 volt och inre motstånd 0,7 ohm, slutes genom en ledning, bestående av en amperemeter och en mättråd. Mättrådens ena ända *A* är därvid medelst en ledningstråd, vars motstånd kan försummas, ansluten till batteriets negativa pol. Från *A* utgår vidare en ledning, som innehåller en galvanometer och två seriekopplade nifeackumulatorer och som slutar med en egg. Denna föres längs mättråden, och man finner slutligen en sådan inställning, att galvanometern blir strömlös. Amperemetern visar då 2,14 amp. Den punkt, där nifeackumulatorerna äro sammankopplade, avledes till jorden. Angiv potentialen vid det förstnämnda batteriets positiva pol. Nifeackumulatorerna hava vardera elektromotoriska kraften 1,23 volt.

Svar: 1,37 volt.

104. En brevpress av flintglas har form av en reguljär tetraeder. Den placeras på horisontellt underlag och bestrålas lodrätt uppifrån med parallellt ljus. Om man anbringar en tuschfläck vid medelpunkten av var och en av de bestrålade sidoytorna, finner man, att medelpunkten av basytan därigenom blir beskuggad. Beräkna av denna uppgift brytningsindex för flintglas.

Svar: 1,63.

105. Ett glasrör, vars yttre diameter är 1 cm och inre diameter 0,6 cm, innehåller etyleter. En ljusstråle infaller mot röret i ett plan, som är vinkelrätt mot rörets axel, passerar genom glaset och totalreflekteras mot vätskepelaren, som den träffar under en infallsvinkel, vilken är lika med brytningsgränsen; den passerar därefter ånyo genom glaset och lämnar slutligen glasröret. Beräkna den totala deviation, som strålen undergått. Brytningsindex för glas är 1,53 och för eter 1,35.

Svar: 11°,88.

106. Man iakttager solspektrum med ett prismaspektroskop och har injusterat detsamma så, att spektrum faller i fokalplanet till kikarens objektiv med *F*-linjen gående genom fokus. Prismat, som är liksidigt, har brytningsexponenten 1,6200 för *F*-linjen och befinner sig i sådant läge, att strålar av detta slag passera prismat under minimideviation. Kikarens objektiv har brännvidden 25 cm, dess okular brännvidden 2,0 cm. Under vilken synvinkel ser observatören den del av spektrum, som befinner sig mellan *F*- och *D*-linjerna? För *D*-linjen är prismats brytningsexponent

1,6085. Observatören använder ögat som när han iakttager oändligt avlägsna föremål.

Svar: 13°,7.

107. En två meter lång, jämntjock, smal trästav (spec. vikt = 0,49) är med sin ena ända fastsatt vid den horisontella botten av en vattenbassäng, så att den fritt ledar åt alla håll. Till vilken höjd måste vatten ifyllas för att staven skall ställa sig a) så att den bildar 30 graders vinkel med botten b) vertikalt i stabilt läge?

Svar: a) 0,7 m; b) 1,4 m eller högre.

108. En bil, vägande tre ton, kan utveckla högst 40 hästkrafter. Vilken är den största lutning en backe får ha, om bilen skall kunna taga den med en hastighet av minst 30 km i timmen? Friktionsmotstånden antagas utgöra 3 % av tyngden.

Svar: lutningsvinkelns sinus = 0,09.

109. Ett järnvägståg, vägande 100 ton, befinner sig i en utförsbacke (lutning 1 : 1000) och går vid en viss tidpunkt med en hastighet av 80 km i timmen, då drivkraften avkopplas och bromsarna slås till. a) Vilken hejdande kraft måste bromsarna utöva på tåget, för att det skall stanna efter 200 m? Friktions- och övriga motstånd (bromsarna ej medräknade) utgöra 1 % av tågets tyngd. Jordaccelerationen är 9,81 m/sek². b) Hur långt utför backen skulle tåget gå, innan det stannade, om bromsarna ej verkade?

Svar: a) 11 700 (11 680) kgf; b) 2 800 (2 796) m.

110. Två fullständigt lika metallsträngar, *A* och *B*, äro belastade med resp. 11 kg och x kg. Håller man fingret på ett visst ställe på *B*, uppdelas denna sträng i två svängande partier, vilka ge stora tersen, resp. kvinten till *A*:s ton. Bestäm x.

Svar: 5,1(14) kg.

111. Tvenne telefoner äro uppställda i ett rum på lika höjd över golvet och på ett avstånd av 1 m från varandra. En person rör sig, med ena örat vänt mot telefonerna, utefter en rak linje på två meters avstånd från sammanbindningslinjen mellan telefonerna och på samma höjd över golvet som dessa. Telefonerna äro förbundna med en växelströmskälla och ge en ton, vars svängningstal är 3 000. Då personen befinner sig på lika avstånd från telefonerna, fås en förstärkning av ljudet. Huru lång sträcka måste han förflytta sig åt ena eller andra hållet för att höra ett minimum? Ljudets hastighet i luft är 340 per sekund.

Svar: 12 cm.

112. En glasballong, rymmande 1 dl, är fylld med nollgradig luft av 600 mm tryck. I glasväggen äro insmälta platinatrådar, vilkas inre ändar förenats med en fin metalltråd, vars motstånd

är 8 ohm. Genom tråden ledes under 5 sekunder en elektrisk ström av 0,1 amp. Huru mycket har efter denna tid gastrycket i ballongen ändrats? Vid det obetydliga värmeutbytet med omgivningen och vid glasets och platinatrådarnas uppvärmning fästes intet avseende. Luftens spec. vikt vid 0°, 760 mm är 0,00129, dess spec. värme vid konstant volym 0,169 och utvidgningskoeff. $^1/_{273}$. Joules konstant = 0,24.

Svar: 12.3 mm.

113. För att mäta ett motstånd har man anslutit detsamma till ett ackumulatorbatteri. I serie med motståndet är en ampèremeter inkopplad och parallellt med motståndet en voltmeter. Ampèremetern visar 0,2 amp., voltmetern 10 volt. Voltmeterns motstånd är 2 550 ohm. Huru stort fel, uttryckt i ohm, uppstår genom att man sätter det sökta motståndet = kvoten mellan de avlästa volt- och ampèretalen?

Svar: 1 ohm.

114. Två punkter, *A* och *B*, i en strömbana äro förbundna med två ledningar, den ena innehållande ett obekant motstånd x, den andra ett galvaniskt element med e. m. k. 1,5 volt; sammanlagda motståndet i denna gren utgör 20 ohm. Elementet vänder den positiva polen mot *A*, och bägge grenarna genomflytas av strömmar i riktning från *A* till *B*. Potentialdifferensen mellan *A* och *B* är 7,5 volt. Huru stort skall x tagas, för att genom elementet skall gå en ström, som är 0,1 av strömmen genom det obekanta motståndet?

Svar: 2,5 ohm.

115. Från ett ackumulatorbatteri (e. m. k. 10 volt; inre motstånd = 0) utgå motståndslösa ledningar till tvenne parallellkopplade elektrolysapparater. Den ena har ett motstånd på 30 ohm och en polarisationsspänning på 1 volt, den andra ett motstånd på 10 ohm och en polarisationsspänning på 2 volt. Hur stor effekt utvecklas i form av värme i elektrolyterna? Joules konstant = 0,24.

Svar: 2,18(4) gkal.

116. En Wheatstones brygga innehåller ett obekant motstånd x och ett något mindre reostatmotstånd r. Vid strömlöshet i galvanometern står glidkontakten på 400 mm avstånd från den ena ändpunkten av den 1 m långa mättråden. Sedan ett motstånd på 1 ohm kopplats parallellt med motståndet x, måste man flytta glidkontakten 200 mm för att få galvanometern strömlös. Beräkna x.

Svar: 1,25 ohm.

117. Vid en Wheatstones brygganordning användes i batteriledningen en blyackumulator (e. m. k. = 2,00 volt; inre motstånd

$= 0$) utan förkopplingsmotstånd. Mättråden var 1 m lång, jämförelsemotståndet 10 ohm. I stället för det obekanta motståndet var i den andra grenen inkopplat ett galvaniskt element med obekant e. m. k. och inre motståndet 0,3 ohm. Då glidkontakten befann sig på 650 mm avstånd från den ändpunkten av mättråden, vid vilken det obekanta elementet var tillkopplat, blev galvanometern strömlös. Hur stor är elementets e. m. k. och huru måste dess poler vara kopplade i förhållande till ackumulatorns poler?

Svar: 1,28 volt; pluspol mot pluspol.

118. Två seriekopplade element, *A* och *B*, med lika e. m. k. och lika inre motstånd (tämligen stort) äro slutna genom ett yttre motstånd *M*. Parallellt med elementet *A* är dessutom inkopplat ett motstånd *N*. Motstånden *M* och *N* äro inbördes lika, vartdera lika med det inre motståndet i ett element. Sök förhållandet mellan strömmarna genom elementen *A* och *B*.

Svar: 4/3.

119. Tre seriekopplade ackumulatorer, *A*, *B* och *C* (e. m. k. $= 2$ volt; inre motstånd $= 0{,}2$ ohm) äro slutna genom ett yttre motstånd på 9,6 ohm. Motståndet är kopplat till *A*:s positiva och *C*:s negativa pol. *A*:s neg. pol förbindes med jorden och får således potentialen $= 0$. Då finnes också på motståndet en punkt *D* med potentialen $= 0$. Vilken blir denna punkts potential, om parallellt till *C* kopplas ett motstånd på 1 ohm?

Svar: $+0{,}105$ volt.

120. Sex lika galvaniska element, vartdera med inre motståndet *r* ohm, äro fördelade i tre grupper *A*, *B* och *C*. *A* består av ett element, *B* och *C* av två, resp. tre element. Grupperna parallellkopplas med liknämnda poler åt samma håll, och det så bildade batteriet slutes med ett yttre motstånd *R*. Huru stort skall *R* vara, för att ingen ström skall gå genom elementet i *A*?

Svar: $\frac{6r}{7}$.

121. På ett ställe, där jordmagnetismens horisontalkomposant är 0,16 gauss och deklination 7°,0 västlig, ville man förändra horisontalkomposanten så, att dess riktning skulle sammanfalla med geografiska meridianens, men dess styrka förbli oförändrad. För detta ändamål användes en vertikalt ställd, cirkulär ledare (6 dm diameter och 5 trådvarv), vars centrum sammanföll med ifrågavarande ställe. Hur bör ledarens plan vara beläget i förhållande till det geografiska meridianplanet, och huru stark ström skall genomflyta ledaren?

Svar: Ledarens plan bör halvera deklinationsvinkeln; 0,187 amp.

"Katt och råtta."

Av **HUGO TEGNÉR.**

»Rent spel!» sade mössen. »Du känner spelreglerna.»

»Ja, jag kan reglerna», sade katten. »Jag måste ideligen gå cirkeln runt åt det håll ni titta och äta upp var trettonde råtta, men jag måste spara den vita råttan som en läckerbit till sist. Tretton är ett olyckligt nummer, men jag skall stå er till tjänst, så gott jag kan.»

»Raska på, bara!» pepo mössen.

»Låt en stackare få tid att tänka», sade katten. »Jag vet ju inte, vem av er jag skall börja med. Jag måste räkna ut det först.» —

Ovanstående tankelek är hämtad ur H. E. DUDENEY, Amusements in mathematics, Thomas Nelson and Sons, London under titeln »Catching the mice».[1] Då jag för en del år sedan i denna verkligt roande bok fann detta puzzle, fångade det mitt intresse och jag gjorde ett utkast till en generell

[1] Lösningen finner man ju lätt, om man utgår från en godtycklig råtta och efter strykningar enligt regeln räknar avståndet (i råttor) från utgångspunkten till den slutligen kvarblivna råttan. Ger man den vita råttan n:r 1, så skall man tydligen börja räkningen från den sjunde, räknat medsols.

metod för lösning av dylika problem. Genom lektor Bolinders uppsats i decembernumret för 1929 av denna tidskrift om S:t Peders lek blev saken ånyo aktuell för mig. Moment I i det följande ger nämligen svar på S:t Peders lek. Här följer den uppsats, som »Catching the mice» gav upphov till.

* *
*

Man har n föremål anordnade i ring. Med utgångspunkt från det första föremålet räknar jag runt föremålen och stryker för var *omgång* det, som får ordningstalet s. Överstruket föremål räknas ej med i följande *varv*.

I. Vilket föremål strykes i r:te omgången?

II. Vilket föremål blir till slut ensamt kvar?

III. I vilken omgång strykes det $\nu + 1$:sta föremålet?

IV. Hur stort skall s tagas, för att det $\nu + 1$:sta föremålet skall strykas i r:te omgången?

V. Hur stort skall s tagas, för att det $\nu + 1$:sta föremålet skall bli sist kvar?

Jag betecknar med $\varepsilon_n^{(l)}$ den positiva heltalsrest, som erhålles, om det hela pos. eller neg. talet n divideras med det hela pos. talet l:

$$n = lm + \varepsilon_n^{(l)}, \tag{1}$$

$$0 \leqq \varepsilon_n^{(l)} < l. \tag{2}$$

Om n är negativt, blir också m neg., och för $\varepsilon_n^{(l)}$ gäller alltid

$$\varepsilon_{n+l\nu}^{(l)} = \varepsilon_n^{(l)}, \tag{3}$$

där ν är ett godtyckligt helt pos. eller neg. tal.

Ur (3) följer

$$\varepsilon_{\varepsilon_n^{(l)}+\nu}^{(l)} = \varepsilon_{n+\nu}^{(l)} \tag{4}$$

samt ur (2)

$$\varepsilon_n^{(1)} = 0. \tag{5}$$

Vidare ger jag begynnelseföremålet ordningsnumret 0 och numrerar sedan föremålen vidare från 1 t. o. m. $(n-1)$. Vid fortsatt räkning följer således åter 0, 1, 2, ...

I. Ordningsnumret (enl. föregående numrering) på det föremål, som strykes i r:te omgången, kallar jag $k_n^{(r)}$. Det första nummer, som strykes, blir tydligen:

(6) $$k_n^{(1)} = \varepsilon_{s-1}^{(n)}.$$

Andra omgången börjar således med

$$\varepsilon^{(n)}_{k_n^{(1)}+1} = \varepsilon^{(n)}_{\varepsilon^{(n)}_{s-1}+1} = \varepsilon_s^{(n)} \quad \text{(enl. (4))}.$$

De $(n-1)$ nummer, som återstå efter första strykningen, äro sålunda i ordning

$$\varepsilon_s^{(n)},\ \varepsilon^{(n)}_{\varepsilon^{(n)}_s+1},\ \ldots,\ n-1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ \varepsilon^{(n)}_{\varepsilon^{(n)}_{s-1}-1},$$

d. v. s. enl. (4)

$$\varepsilon_s^{(n)},\ \varepsilon_{s+1}^{(n)},\ \ldots,\ n-1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ \varepsilon_{s-2}^{(n)},$$

eller

(7) $\varepsilon_{s+t}^{(n)}$, där t i ordning är $= 0, 1, 2, \ldots, (n-2)$.

Jag räknar nu dessa $(n-1)$ st. t som de givna och får enl. (6)

$$k_{n-1}^{(1)} = \varepsilon_{s-1}^{(n-1)}$$

samt enl. (7)

$$k_n^{(2)} = \varepsilon^{(n)}_{s+k_{n-1}^{(1)}} = \varepsilon^{(n)}_{s+\varepsilon_{s-1}^{(n-1)}}.$$

Genom att upprepa samma förfarande erhåller jag slutligen

(8) $$k_n^{(r)} = \varepsilon^{(n)}_{s+k_{n-1}^{(r-1)}};\ k_{n-1}^{(r-1)} = \varepsilon^{(n-1)}_{s+k_{n-2}^{(r-2)}};\ \ldots;\ k_{n-r+1}^{(1)} = \varepsilon_{s-1}^{(n-r+1)}$$

eller

(9) $$k_n^{(r)} = \varepsilon^{(n)}_{s\,+\,\varepsilon^{(n-1)}_{s\,+\,\varepsilon^{(n-2)}_{s\,+\,\ldots\,+\,\varepsilon^{(n-r+1)}_{s-1}}}}.$$

Ekv. (8) eller (9) ger svaret på första frågan. Emedan det första föremålet har nummer 0, så kommer det $(k_n^{(r)}+1)$:sta föremålet att bli det r:te som strykes.

Exempel (hämtat ur S:t Peders lek): Föremålens antal är 30. Jag stryker vart 9:de. Vilket strykes i 7:de omgången?

$n = 30$; $s = 9$; $r = 7$; $n - r + 1 = 24$. Med hjälp av (3) erhålles

$$\varepsilon_{8}^{(24)} = 8;\ \varepsilon_{9+8}^{(25)} = 17;\ \varepsilon_{9+17}^{(26)} = 0;\ \varepsilon_{9+0}^{(27)} = 9;\ \varepsilon_{9+9}^{(28)} = 18;\ \varepsilon_{9+18}^{(29)} = 27;\ \varepsilon_{9+27}^{(30)} = 6.$$

I 7:de omgången strykes således det *sjunde* föremålet (med ordningsnummer 6).

II. Det föremål, som sist blir kvar, strykes i n:te omgången. Detta föremål är således det $(k_n^{(n)} + 1)$:sta. Jag erhåller $k_n^{(n)} = k_n$ ur (8) eller (9) genom att sätta $r = n$. Enl. (5) är $k_1 = \varepsilon_{s-1}^{(1)} = 0$.

$$k_n = \varepsilon_{s\,+\,\varepsilon_{s\,+\,\varepsilon_{s\,+\,\ldots\,+\,\varepsilon_{s\,+\,\varepsilon_{s}^{(2)}}^{(3)}}}^{(n-2)}}^{(n-1)}}^{(n)} \tag{10}$$

Exempel 1: Föremålens antal är 12. Jag stryker vart 19:de. Vilket blir sist kvar?

$n = 12$; $s = 19$; $\varepsilon_{19}^{(2)} = 1$; $\varepsilon_{19+1}^{(3)} = 2$; $\varepsilon_{19+2}^{(4)} = 1$; $\varepsilon_{19+1}^{(5)} = 0$; $\varepsilon_{19+0}^{(6)} = 1$; $\varepsilon_{19+1}^{(7)} = 6$; $\varepsilon_{19+6}^{(8)} = 1$; $\varepsilon_{19+1}^{(9)} = 2$; $\varepsilon_{19+2}^{(10)} = 1$; $\varepsilon_{19+1}^{(11)} = 9$; $\varepsilon_{19+9}^{(12)} = 4$.

Det *femte* föremålet blir sist kvar.

Exempel 2 (»Catching the mice»): $n = 13$; $s = 13$; $\varepsilon_{13}^{(2)} = 1$; $\varepsilon_{13+1}^{(3)} = 2$; $\varepsilon_{13+2}^{(4)} = 3$; $\varepsilon_{13+3}^{(5)} = 1$; $\varepsilon_{13+1}^{(6)} = 2$; $\varepsilon_{13+2}^{(7)} = 1$; $\varepsilon_{13+1}^{(8)} = 6$; $\varepsilon_{13+6}^{(9)} = 1$; $\varepsilon_{13+1}^{(10)} = 4$; $\varepsilon_{13+4}^{(11)} = 6$; $\varepsilon_{13+6}^{(12)} = 7$; $k_{13} = \varepsilon_{13+7}^{(13)} = 7$.

Det *åttonde* föremålet blir sist kvar. Således skall räkningen börja med den åttonde råttan *bakom* den vita (denna räknad som n:r 1), d. v. s. den sjunde, räknat medsols.

III. Enl. I strykes det $(k_n^{(r)} + 1)$:sta föremålet i r:te omgången, där $k_n^{(r)}$ bestämmes ur (9). Om det $\nu + 1$:sta föremålet strykes i r:te omgången, så är således $k_n^{(r)} = \nu$ och den

omgång, i vilken det $\nu + 1$:sta föremålet strykes, erhålles genom att bestämma r ur

$$\varepsilon_s^{(n)} + \varepsilon_{s+\varepsilon_s^{(n)}}^{(n-1)} + \varepsilon_{s+\varepsilon_s^{(n)}+\varepsilon_{s+\varepsilon_s^{(n)}}^{(n-1)}}^{(n-2)} + \ldots + \varepsilon_{s-1}^{(n-r+1)} = \nu. \tag{11}$$

För att få en för beräkningen mera praktisk formel inför jag Gauss' kongruensbeteckning (n, n_1, l hela tal, $l > 0$)

$$n \equiv n_1 \pmod{l} \tag{12}$$

(i ord: n är kongruent med n_1 enligt modulen l), som innebär, att *skillnaden* $(n - n_1)$ *är jämnt delbar med* l.

Ekvationen

$$\nu = \varepsilon_n^{(l)} \tag{13}$$

innebär således 1) att

$$n \equiv \nu \pmod{l}, \tag{14}$$

2) att

$$0 \leqq \nu < l. \tag{15}$$

Ur (12) följer enl. definitionen

$$n + \nu \equiv n_1 + \nu \pmod{l}, \tag{16}$$

$$-n \equiv -n_1 \pmod{l}, \tag{17}$$

$$\nu n \equiv \nu n_1 \pmod{l}. \tag{18}$$

Jag utgår nu från systemet (8), som enl. (13), (14), (15) och (16) kan skrivas på följande sätt:

$$\begin{cases} s \equiv k_n^{(r)} - k_{n-1}^{(r-1)} \pmod{n} \\ s \equiv k_{n-1}^{(r-1)} - k_{n-2}^{(r-2)} \pmod{n-1} \\ - - - - - - - - - - \\ s \equiv 1 + k_{n-r+1}^{(1)} \pmod{n-r+1}, \end{cases} \tag{19}$$

där

$$0 \leqq k_{n-\varrho}^{(r-\varrho)} < n - \varrho; \quad \varrho = 0, 1, 2, \ldots (r-1). \tag{20}$$

Enl. (11) sätter jag $k_n^{(r)} = \nu$ och skriver enl. (16), (17) om (19) sålunda:

$$\begin{cases} -s+1+\nu \equiv 1+k_{n-1}^{(r-1)} \pmod{n} \\ -s+1+k_{n-1}^{(r-1)} \equiv 1+k_{n-2}^{(r-2)} \pmod{n-1} \\ - - - - - - - - - - - - \\ -s+1+k_{n-r+1}^{(1)} \equiv 0 \pmod{n-r+1}. \end{cases}$$

Som enl. (20) högra ledet i varje kongruens är pos. (eller 0) och mindre än modylen, så kan systemet skrivas

$$\begin{cases} \varepsilon_{-s+1+\nu}^{(n)} = 1+k_{n-1}^{(r-1)}\,;\ \varepsilon_{-s+1+k_{n-1}^{(r-1)}}^{(n-1)} = 1+k_{n-2}^{(r-2)}\,;\ \ldots \\ \ldots;\ \varepsilon_{-s+1+k_{n-r+2}^{(2)}}^{(n-r+2)} = 1+k_{n-r+1}^{(1)}\,;\ \varepsilon_{-s+1+k_{n-r+1}^{(1)}}^{(n-r+1)} = 0 \end{cases}$$

eller

$$(21) \qquad 0 = \varepsilon_{-s}^{(n-r+1)} + \varepsilon_{-s+\ldots+\varepsilon_{-s+\varepsilon_{-s+1+\nu}^{(n)}}^{(n-1)}}^{(n-r+2)},$$

varur således r skall bestämmas.

Exempel: Föremålens antal är 34; jag stryker vart 76:te. I vilken omgång strykes det första (med ordningsnummer 0)?

$n=34;\ s=76;\ \varepsilon_{-s+1}^{(n)} = \varepsilon_{-75}^{(34)} = \varepsilon_{3\,.\,34-75}^{(34)} = 27;\ \varepsilon_{-76+27}^{(33)} = 17;$
$\varepsilon_{-59}^{(32)} = 5;\ \varepsilon_{-71}^{(31)} = 22;\ \varepsilon_{-54}^{(30)} = 6;\ \varepsilon_{70}^{(29)} = 17;\ \varepsilon_{-59}^{(28)} = 25;\ \varepsilon_{-51}^{(27)} = 3;$
$\varepsilon_{-73}^{(26)} = 5;\ \varepsilon_{-71}^{(25)} = 4;\ \varepsilon_{-72}^{(24)} = 0;\ n-r+1 = 35-r = 24;\ r = 11.$

Det första föremålet strykes i 11:te omgången.

Forts.

Sannolikhetsräkning på empirisk grundval.

Av EDVARD GÖRANSSON.

6. Livförsäkring. (Forts.)

Premier. Ett belopp av 1 krona, som skall utbetalas efter t år, har, förutsatt att δ är konstant, ett nuvärde $e^{-\delta t}$. Om 1 krona skall utfalla efter t år, till en nu x-årig person, om han då lever, är genomsnittsvärdet därav

$$_tE_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} e^{-\delta t}.$$

Förlänges bråket med $e^{-\delta x}$ och sättes

$$D_x = l_x e^{-\delta x} = l_x (1+i)^{-x} = l_x v^x,$$

då $v = \frac{1}{1+i}$, så blir

$$_tE_x = \frac{D_{x+t}}{D_x}.$$

Hjälpkvantiteten D_x brukar kallas de levandes diskonterade tal.

Om ett belopp skall utgå med 1 krona om året kontinuerligt, d. v. s. med beloppet dt under tidselementet dt, så länge en nu x-årig person lever, så är den kontinuerliga livräntans kapitalvärde

$$\bar{a}_x = \frac{1}{l_x} \int_0^\infty l_{x+t} e^{-\delta t} dt.$$

Förlänges med $e^{-\delta x}$, erhålles

$$\bar{a}_x = \frac{1}{D_x} \int_0^\infty D_{x+t} dt.$$

Om man inför beteckningen

$$\bar{N}_x = \int_0^\infty D_{x+t}\, dt,$$

blir

$$\bar{a}_x = \frac{\bar{N}_x}{D_x}.$$

För en temporär livränta, som skall utgå under n år kontinuerligt, är

$$\bar{a}_{x\,\overline{n}|} = \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}{D_x}.$$

Vid beräkning av $\bar{N}_x$ kan man använda den i det föregående (1931: 3, sid. 142) härledda Eulers (Maclaurins) summationsformel. Man har

$$(1) \qquad D_{x+t} = l_{x+t}\, e^{-\delta(x+t)} = l_0\, e^{-\int_0^{x+t} \mu_t\, dt - \delta(x+t)}$$

och alltså, om D'_{x+t} betecknar derivatan av D_{x+t},

$$(2) \qquad \frac{D'_{x+t}}{D_{x+t}} = -(\mu_{x+t} + \delta).$$

Vidare är $D_x = 0$ för $x \geqq 100$. Alltså är

$$\bar{N}_x = \int_0^\infty D_{x+t}\, dt = h \sum_{\nu=0}^{\infty} D_{x+\nu} - \frac{h}{2} D_x - \frac{h^2}{12}(\mu_x + \delta) D_x.$$

Sättes $h = 1$ och betecknas kapitalvärdet av en förskottsvis (prænumerando) utgående livränta med a_x, alltså

$$a_x = \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} D_{x+\nu}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x},$$

så är

$$a_x = \bar{a}_x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12}(\mu_x + \delta).$$

Kapitalvärdet av en livränta, som utgår förskottsvis m

gånger om året med samma belopp, erhålles genom att sätta $h = \frac{1}{m}$. Alltså

$$a_x^{(m)} = \bar{a}_x + \frac{1}{2m} + \frac{1}{12m^2}(\mu_x + \delta).$$

Om en livränta skall utgå i efterskott (postnumerando), betecknas dess kapitalvärde med a_x. Alltså

$$a_x = a_x - 1 = \bar{a}_x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12}(\mu_x + \delta),$$

och om den skall utgå i m lika delar under året första gången efter $\frac{1}{m}$ år

$$a_x^{(m)} = \bar{a}_x - \frac{1}{2m} + \frac{1}{12m^2}(\mu_x + \delta).$$

För utförande av här ifrågakommande beräkningar uppgöres en tabell upptagande för varje ålder värdena på μ_x och l_x ävensom för en viss räntefot D_x, N_x, $\bar{N}_x$, a_x och $\bar{a}_x$. En dylik tabell kallas *grundtabell.*

En försäkring, som skall utfalla vid en persons dödsfall med ett visst belopp (dödsfallssumman), har ett kapitalvärde, som är lika med dödsfallssumman, minskad med kapitalvärdet av räntor, som belöpa sig å försäkringssumman under den försäkrades livstid. Om försäkringssumman är 1 krona, är alltså engångsvärdet utan hänsyn till kostnader

$$\bar{A}_x = 1 - \delta \bar{a}_x,$$

och om kapitalet skall utfalla efter n år eller vid tidigare inträffat dödsfall (blandad liv- och kapitalförsäkring)

$$\bar{A}_{x\,\overline{n|}} = 1 - \delta\, \bar{a}_{x\,\overline{n|}}.$$

Med användning av de beteckningar för olika slag av kostnader, för vilka redogjorts i häft. 1931:3 sid. 142, är engångspremien för 1 000 kronors försäkringssumma

$$A'_{x\,\overline{n|}} = 1000\,[1 + \alpha + \beta \bar{a}_{x\,\overline{n|}} + \sigma_1 + \sigma_2\, \bar{a}_{x\,\overline{n|}} - \delta\, \bar{a}_{x\,\overline{n|}}].$$

Iakttages att $\delta = 0.039221$ och insättas i övrigt de värden, som äro angivna i föregående häfte, erhålles

$$A'_{x\,\overline{n}|} = 1040 - 37.221\,\bar{a}_{x\,\overline{n}|}.$$

Om årlig premie skall utgå under s år, är

$${}_s\overline{P}_{x\,\overline{s}|}\,\bar{a}_{x\,\overline{s}|} = A'_{x\,\overline{n}|} + \gamma \cdot {}_s\overline{P}_{x\,\overline{s}|}\,\bar{a}_{x\,\overline{s}|},$$

då $\overline{P}$ utgår kontinuerligt. Om premien P' i stället skall utgå förskottsvis, är

$${}_sP'_{x\,\overline{s}|}\,a_{x\,\overline{s}|} = {}_s\overline{P}_{x\,\overline{s}|}\,\bar{a}_{x\,\overline{s}|}$$

eller

$$\frac{{}_sP'_{x\,\overline{s}|}}{{}_s\overline{P}_{x\,\overline{s}|}} = \frac{\bar{a}_{x\,\overline{s}|}}{a_{x\,\overline{s}|}}.$$

Man erhåller alltså helårspremien genom att multiplicera den kontinuerliga premien med en faktor, som beror av åldern och premiebetalningstiden. De flesta svenska bolag sätta

$${}_sP'_{x\,\overline{s}|} = 0.98\,\overline{P}_{x\,\overline{s}|}.$$

Då vidare $\gamma = 0{,}04$, blir alltså

$${}_sP'_{x\,\overline{s}|} = \frac{1.0208333}{\bar{a}_{x\,\overline{s}|}} \cdot A'_{x\,\overline{n}|}.$$

Premiereserv. Vid försäkringsavtalets avslutande är kapitalvärdet av bolagets förpliktelse lika med kapitalvärdet av försäkringstagarens förpliktelse. Under loppet av försäkringstiden avtager kapitalvärdet av försäkringstagarens förpliktelse och vid försäkringstidens slut är den lika med 0, under det att bolagets ansvarighet vid sistnämnda tidpunkt är lika med hela försäkringssumman. Av de inflytande premierna avsätter därför bolaget en del till bildande av en fond, *premiereserven,* vilken enligt försäkringslagen skall vara lika med det belopp, varmed kapitalvärdet av bolagets framtida utgifter för försäkringen må överskjuta kapitalvärdet av en viss premie, reservpremien. Vid be-

räkningen antages premiereserven för 1 kronas försäkringssumma vara densamma för alla med samma inträdesålder och samma duration samt samma försäkringssätt. Vid reservpremiens beräkning är i lagen en övre gräns bestämd för anskaffningskostnaden α. Den får icke överstiga 8 % av bolagets beräknade utgifter för försäkringsavtalets fullgörande och i intet fall 0.025 kronor för en försäkring av 1 krona.

För en premiefri försäkring å ett liv på 1000 kronor att utbetalas efter n år eller vid tidigare inträffat dödsfall är premiereserven efter t år

$$A_{x+t\,\overline{n-t|}} = 1000\left[1 - (\delta - \beta)\,\bar{a}_{x+t\,\overline{n-t|}}\right] = \\ = 1000 - 37.471\,\bar{a}_{x+t\,\overline{n-t|}}.$$

För en försäkring med pågående premiebetalning, vilken skall upphöra efter s år, är premiereserven efter t år

$${}_tV_{x\,\overline{n|}} = A_{x+t\,\overline{n-t|}} - {}_s\overline{P}_{x\,\overline{n|}}\,\bar{a}_{x+t\,\overline{s-t|}},$$

då reservpremien ${}_s\overline{P}_{x\,\overline{n|}}$ beräknas enligt formeln

$${}_sP_{x\,\overline{n|}} = \frac{1000\left[(1+\alpha) - (\delta - \beta)\,\bar{a}_{x\,\overline{n|}}\right]}{\bar{a}_{x\,\overline{s|}}} = \\ = \frac{1000\,(1+\alpha) - 37.471\,\bar{a}_{x\,\overline{n|}}}{\bar{a}_{x\,\overline{s|}}},$$

där

$$\alpha = 0.08\left(1 - \delta\,\bar{a}_{x\,\overline{n|}}\right) = 0.08\left(1 - 0.039221\,\bar{a}_{x\,\overline{n|}}\right),$$

dock högst 0.025.

Om $n = s$, reduceras formeln för V till

$${}_tV_{x\,\overline{n|}} = 1000\left[1 - \frac{1+\alpha}{\bar{a}_{x\,\overline{n|}}}\,\bar{a}_{x+t\,\overline{n-t|}}\right].$$

Deriveras det sista uttrycket med avseende på t, erhålles

$$\frac{d}{dt}\left({}_tV_{x\,\overline{n|}}\right) = -1000\,\frac{1+\alpha}{\bar{a}_{x\,\overline{n|}}}\,\frac{d}{dt}\,\bar{a}_{x+t\,\overline{n-t|}}.$$

Men

$$\bar{a}_{x+t\,\overline{n-t|}} = \frac{\int_{x+t}^{n-t} D_{x+t}\,dt}{D_{x+t}} = \frac{\int_{x+t}^{\infty} D_{x+t}\,dt - \bar{N}_{x+n}}{D_{x+t}}.$$

Genom logaritmisk differentiation erhålles med iakttagande av formlerna (1) och (2)

$$\frac{\frac{d}{dt}\,\bar{a}_{x+t\,\overline{n-t|}}}{\bar{a}_{x+t\,\overline{n-t|}}} = -\frac{D_{x+t}}{\int_{x+t}^{n-t} D_{x+t}\,dt} + \delta + \mu_{x+t} =$$

$$= -\frac{1}{\bar{a}_{x+t\,\overline{n+t|}}} + \delta + \mu_{x+t}.$$

Alltså

$$\frac{d}{dt}\left({}_tV_{x\,\overline{n|}}\right) = -1000\,\frac{1+\alpha}{a_{x\,\overline{n|}}}\left[\left(\delta+\mu_{x+t}\right)\bar{a}_{x+t\,\overline{n+t|}} - 1\right] =$$

$$= -\left(1000 - {}_tV_{x\,\overline{n|}}\right)\left(\delta+\mu_{x+t}\right) + 1000\,\frac{1+\alpha}{\bar{a}_{x\,\overline{n|}}}.$$

Multipliceras med dt och tillfogas ${}_tV_{x\,\overline{n|}}$ å båda sidor, erhålles

$${}_{t+dt}V_{x\,\overline{n|}} = {}_tV_{x\,\overline{n|}}\left[1 + (\delta + \mu_{x+t})\,dt\right] - 1000\,(\delta+\mu_{x+t})\,dt + 1000\,\frac{1+\alpha}{a_{x\,\overline{n|}}}\,dt.$$

Iakttages, att reservpremien

$$\overline{P}_{x\,\overline{n|}} = 1000\,\frac{1+\alpha}{a_{x\,\overline{n|}}} - 1000\,(\delta-\beta),$$

erhålles

$${}_tV_{x\,\overline{n|}}(1 + \delta\,dt) + \overline{P}_{x\,\overline{n|}}\,dt =$$

$$= {}_{t+dt}V_{x\,\overline{n|}} + \left(1000 - {}_tV_{x\,\overline{n|}}\right)\mu_{x+t}\,dt + 1000\,\beta\,dt.$$

Å vänster sida ingå de tillgångar, som stå till förfogande under tidselementet dt, nämligen den ingående premiereserven, dess tillväxt under tidselementet på grund av förräntning samt den reservpremie, som belöper sig på tiden dt. Dessa tillgångar användas så, att premiereserven vid

tiden $t + dt$ uppgår till det belopp den skall ha, vidare till täckande av risken under tiden dt samt slutligen till löpande kostnader under tidselementet. Risksumman är nämligen $1000 - {}_tV_{x\overline{n}|}$ och riskpremien för risksumman 1 krona är under tidselementet $\mu_{x+t}\,dt$.

Katastrof- och utjämningsreserv. Vid premiereservens beräkning har bortsetts från katastrof- och utjämningstilläggen, därför att dessa tillägg skola avsättas till en särskild reserv, som får tagas i anspråk endast för det ändamål, för vilket den är avsatt. Katastrof- och utjämningsreserven gottskrives 4 % ränta.

Premieåterbäring. Försiktigtvis räknar man med något högre dödlighetsintensitet än den, som framgått ur erfarenheten. De 13 bolag, som gjort överenskommelse om gemensamma premier, sätta

$$\mu_{\text{obel}} = 0{,}95\,\mu_{\text{bel}} - 0{,}0006,$$

där μ_{obel} betyder dödlighetsintensiteten *utan* och μ_{bel} dödlighetsintensiteten *med* säkerhetstillägg.

På grund härav beräknar man att, om dödlighetsförloppet förlöper normalt, kunna återbetala 5 % av riskpremien + 60 öre för 1000 kronors risksumma. Vidare är för närvarande bolagens medelräntefot något högre än 4 %, som lagts till grund för beräkningarna. Kungl. Maj:t bestämmer för några år framåt med hänsyn till bolagens placeringar, hur stor överränta som skall återbetalas till de försäkrade. För närvarande utgör denna $^1/_2$ % av den avsatta premiereserven. Här omnämnda beräknade överskott (å dödlighet och ränta) benämnes *premieåterbäring*. Redan avsatt premieåterbäring gottgöres ränta efter en räntefot, som bestämmes av Konungen, för närvarande $4^1/_2$ %.

Säkerhetsfond. Om summan av redan avsatt säkerhetsfond och premieåterbäringsreserv icke uppgår till en tjugondedel av försäkringsfonden för livförsäkringar, så ock då säkerhetsfonden ej uppgår till en tiondedel av premie-

återbäringsreserven, skall till säkerhetsfond årligen avsättas minst hälften av bolagets årsvinst, sedan avsättning till premieåterbäring ägt rum och möjligen befintlig brist från föregående år täckts. Ej må återbetalning av garantikapital äga rum, där ej summan av nämnda fonder uppgår till sagda belopp.

Vinst. Av den behållning, som återstår efter avsättningar till nyssnämnda fonder, må på sätt i den av Kungl. Maj:t fastställda bolagsordningen stadgas, utdelning till aktieägare och garanter äga rum. All återstående vinst skall tillfalla de försäkrade och fördelas enligt grunder, som äro fastställda av Konungen.

I det förut anförda, av KARL ROOSWALL utgivna arbetet, »Sannolikhetsräkning för gymnasier och övriga läroanstalter», vilket utkom så sent som år 1929, beräknas premier med hänsyn endast till ränta och dödlighet. Författaren anger, att »bolaget i så fall skulle varken vinna eller förlora på affären, därför måste premien sättas högre». Belastningen som författaren förmenar utgöra bolagets vinst på affären, synes vara tillyxad på måfå trots försäkringslagens förut (1931:3, sid. 129) anförda föreskrift, som daterar sig från år 1914. Den försäkrades tillgodohavande, om avtalet från hans sida häves, anses av hr ROOSWALL vara lika med premiereserven beräknad som ett genomsnittsvärde utan hänsyn till kostnader och ännu mindre till antiselektionen. Då en läroboksförfattare visar sådan brist på kännedom om gällande försäkringslag och den av bolagen använda praxis vid beräkningarna, har det synts mig lämpligt att i detta sammanhang upptaga detta ämne, trots professor CRAMÉRS förträffliga framställningar dels i anförda arbete,[1] sid. 151 ff., dels även i Svenska försäkringsföreningens publikationsserie nr 4.[2]

[1] Sannolikhetskalkylen och några av dess användningar.

[2] Sex föreläsningsserier, Stockholm, Svenska försäkringsföreningen, 1928.

Riskproblemet. Den matematiska riskteorien behandlar den risk en försäkringsanstalt löper, sedan den mottagit premien. Eftersom bolaget gör årligt bokslut, gäller det närmast att finna ett uttryck för den *årliga* risken. Man talar om *genomsnittlig risk* och *medelrisk*. Professor ALF GULDBERG (Oslo)[1] påpekar, att då här är fråga om avvikelser från medelvärdet, man lämpligen kan anknyta framställningen om risken till felteorien.

Den *genomsnittliga* risken är lika med den genomsnittliga förlust, som ett försäkringsbolag kan lida på grund av dödlighetsförloppet bland ett komplex av försäkringstagare. Vid bildandet av detta genomsnittsvärde har man endast att medtaga de fall, som kunna giva förlust för bolaget. Å andra sidan beräknas den genomsnittliga vinsten uppgå till samma belopp som förlusten, så att om förlusterna räknas som negativa och vinsterna som positiva storheter, summan blir lika med noll. Detta är en följd av att premierna äro riktigt beräknade.

Från felteorien (1931: 1, sid. 7) erinra vi oss, att osäkerheten hos medelvärdet m mätes av det genomsnittliga felet, som är lika med medelvärdet av avvikelsernas absoluta belopp

$$\varepsilon_1 = \frac{\Sigma|x_i - m|}{n}.$$

Då komplexet av försäkringar förutsättes vara mycket stort, är summan av de absoluta beloppen av de negativa avvikelserna lika stort som summan av de positiva, vadan de förra, som enligt det föregående motsvara genomsnittliga risken är lika med $\frac{\varepsilon_1}{2}$.

Antag för enkelhets skull, att premien erlägges helårsvis i förskott, att försäkringen regleras i efterskott vid försäkringsårets slut och att vid försäkringsårets slut göres avsättning till premiereserv. För enkelhets skull bortses

[1] ALF GULDBERG, Zum Problem des Risikos. Neuvième congrès international d'actuaires, rapports D, Uppsala, Almqvist & Wiksell, 1930.

även från förvaltningskostnaden. För en $(x+n)$-årig person, som varit försäkrad under n år, betecknas den vid $(n+1)$:sta försäkringsårets början avsatta nettoreserven med ${}_nV_x$ och den vid slutet av samma försäkringsår avsatta med ${}_{n+1}V_x$. Den för $(n+1)$:sta försäkringsåret erlagda nettopremien är P_{n+1}. Låt vidare försäkringssumman vara 1 krona. Man har då rekursionsformeln

$$(3) \qquad l_{x+n}\,({}_nV_x + P_{n+1}) = d_{x+n}\,v + l_{x+n+1}\cdot {}_{n+1}V_x\cdot v,$$

där vänstra ledet betyder det belopp, som vid $(n+1)$:sta försäkringsårets början står till förfogande. Detta belopp skall användas dels till utbetalning vid årets slut av 1 krona till var och en av $d_{x+n} = l_{x+n} - l_{x+n+1}$ under året avlidna personer samt till reservavsättning för de l_{x+n+1}, som leva kvar vid årets slut.

Insättes från (3) värdet på ${}_nV_x + P_{n+1}$, så blir värdet vid årets början av den genomsnittliga förlusten på reglering av en dödsfallsutbetalning av 1 krona vid slutet av $(n+1)$:sta försäkringsåret

$$a = v - ({}_nV_x + P_{n+1}) = \frac{l_{x+n}\cdot v - d_{x+n}\cdot v - l_{x+n+1}\cdot {}_{n+1}V_x\cdot v}{l_{x+n}},$$

$$(4) \qquad a = l_{x+n+1}\cdot\frac{v(1-{}_{n+1}V_x)}{l_{x+n}}.$$

Värdet vid årets början av den genomsnittliga förlusten på avsättning till premiereserv vid årets slut utgör

$$b = {}_{n+1}V_x\cdot v - ({}_nV_x + P_{n+1}) = \frac{l_{x+n}\cdot {}_{n+1}V_x\cdot v - d_{x+n}\cdot v - l_{x+n+1}\cdot {}_{n+1}V_x\cdot v}{l_{x+n}},$$

$$(5) \qquad b = -\frac{d_{x+n}\cdot v\cdot(1-{}_{n+1}V_x)}{l_{x+n}}$$

och alltså

$$d_{x+n}\,a + l_{x+n+1}\,b = 0.$$

En term i den serie, som anger genomsnittliga risken, är, om försäkringssumman är 1,

$$(6) \qquad r_{x+n} = \frac{d_{x+n}\,|a| + l_{x+n+1}\,|b|}{2\,l_{x+n}}.$$

Av (4) och (5) erhålles

$$(7) \qquad r_{x+n} = \frac{d_{x+n}}{l_{x+n}} \cdot \frac{l_{x+n+1}}{l_{x+n}} \cdot v \cdot (1 - {}_{n+1}V_x).$$

Vid $(n + 1)$:sta försäkringsårets slut är risksumman $1 - {}_{n+1}V_x$. På var och en $(x + n)$-åring kommer vid $(n + 1)$:sta försäkringsårets början i genomsnitt

$$p_{x+n} \cdot v \cdot (1 - {}_{n+1}V_x).$$

Om bolaget vill försäkra $(x + n)$-åringen mot förlusten härav, blir riskpremien för året

$$q_{x+n} \cdot p_{x+n} \cdot v \cdot (1 - {}_{n+1}V_x),$$

vilket uttryck är identiskt med högra ledet i (7). Den årliga genomsnittliga risken är alltså den premie, mot vilken bolaget för ett år kan försäkra sig mot förlusten av riskpremien.

Det ligger i sakens natur, att i fråga om genomsnittlig risk, man icke kan tala om en *liten* grupp av försäkringar och ännu mindre om en enstaka försäkring. Om S_{x+n} är sammanlagda försäkringssumman för $(x + n)$-åringar, som varit försäkrade i n år efter samma försäkringssätt, så är alltså den årliga genomsnittliga risken för försäkringsbeståndet

$$(8) \qquad \frac{\varepsilon_1}{2} = \Sigma\, p_{x+n}\, q_{x+n}\, S_{x+n}\, v\, (1 - {}_{n+1}V_x).$$

Med utgångspunkt från formeln (7) kan man beräkna engångsvärdet av den årliga risken och följaktligen motsvarande årliga genomsnittspremie.[1] I stället för att vid premieberäkningen belasta dödligheten med säkerhetstillägg synes man kunna öka premien med ett på ovan angivet sätt beräknat tillägg för den genomsnittliga årliga risken. Det, som ej åtgår till kostnad för återförsäkring eller utbetalningar, synes böra fonderas och återbetalas till den

[1] Guldberg, loc cit sid. 376 ff. Jfr ock Alfred Berger, Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik, II, sid. 7 ff., Berlin, Springer, 1925.

försäkrade, när försäkringsavtalet upphör. Emellertid komma förlustmöjligheter att också vidlåda den här ifrågasatta tilläggspremien. Det fordras också ett tillägg till den genomsnittliga årliga riskpremien, och givetvis fordras ytterligare risktillägg till premier av 3:e, 4:e, ... ordningen. SCHÖNWIESE menar, att man på dessa grunder måste frånkänna den genomsnittliga risken varje praktiskt värde.[1]

Större praktisk betydelse för försäkringsverksamhet har enligt SCHÖNWIESE endast *medelrisken*. Denna motsvarar, vad vi tidigare (1931: 1, sid. 11 och 18) ha kallat medelfelet, resp. spridningen, d. v. s.

$$\varepsilon_2^{\,2} = \sigma^2 = \frac{\Sigma\,(x_i - m)^2}{n}.$$

Medelrisken, d. v. s. kvadratroten ur ovanstående uttryck, är även ett mått på osäkerheten i medelvärdet m.

I analogi med formeln (6) är en term i den serie, som anger medelrisken

$$(9) \qquad M_{x+n}^2 = \frac{d_{x+n} \cdot a^2 + l_{x+n+1} \cdot b^2}{l_{x+n}}.$$

Insättas värdena på a och b enligt (4) och (5), blir

$$l_{x+n}\, M_{x+n}^2 = d_{x+n} \frac{l_{x+n+1}^2 \cdot v^2}{l_{x+n}^2} (1 - {}_{n+1}V_x)^2 + l_{x+n+1} \cdot \frac{d_{x+n}^2 \cdot v^2}{l_{x+n}^2} (1 - {}_{n+1}V_x)^2 =$$

$$= \frac{d_{x+n} \cdot l_{x+n+1} \cdot v^2}{l_{x+n}^2} (1 - {}_{n+1}V_x)^2 (l_{x+n+1} + d_{x+n})$$

och alltså

$$M_{x+n}^2 = \frac{d_{x+n}}{l_{x+n}} \cdot \frac{l_{x+n+1}}{l_{x+n}} \cdot v^2 \cdot (1 - {}_{n+1}V_x)^2.$$

För ett komplex av försäkringar är alltså medelrisken lika med kvadratroten ur

$$(10) \qquad \sigma^2 = \Sigma\, p_{x+n}\, q_{x+n}\, S^2{}_{x+n}\, v^2 (1 - {}_{n+1}V_x)^2.$$

[1] RUDOLF SCHÖNWIESE, Das Problem des Risikos, neuvième congrès international d'actuaires, Rapports D, Problème du risque, Uppsala, Almqvist & Wiksell, 1930.

Om man endast tager hänsyn till riskpremien, d. v. s. bortser från kostnader och den del av premien (sparpremien), som fordras för avsättning till premiereserven vid årets slut, är summan av premierna *(riskpremierna)*

$$m = \Sigma\, q_{x+n}\, S_{x+n}\, v\,(1 - {}_{n+1}V_x), \tag{11}$$

d. v. s. den sannolikaste utbetalningen för inträffade dödsfall.

Sannolikheten för att sammanlagda beloppet av dödsfallsutbetalningar överstiger λ (jfr 13: 4 år 1930, fig. 2, sid. 200 samt 1931: 1, sid. 18) är

$$p = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}\, dx.$$

Sätt $\frac{x-m}{\sigma} = t$. Alltså

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\lambda-m}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Men enligt en formel i häft. 1930: 4, sid. 201 är

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}.$$

Sättes $h^2 = {}^1/_2$, erhålles

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}.$$

Alltså

$$\int_{-\infty}^{\frac{\lambda-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + \int_{\frac{\lambda-m}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi},$$

varav

$$p = 1 - \Phi\left(\frac{\lambda - m}{\sigma}\right), \tag{12}$$

då $\Phi(x)$ är den normala fördelningsfunktionen (se 1931: 1, sid. 20). För positiva x-värden anföras här nedan värdena på $\Phi(x)$ enligt en tabell i professor CRAMÉRS förut anförda arbete. För negativa x-värden beräknas funktionsvärdena enligt en formel i häft. 1931: 1, nederst å sid. 20.

Den normala fördelningsfunktionen $\Phi(x)$.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0·0	0·5000	1·0	0·8413	2·0	0·9772	3·0	0·9987
0·1	0·5398	1·1	0·8643	2·1	0·9821	3·1	0·9990
0·2	0·5793	1·2	0·8849	2·2	0·9861	3·2	0·9993
0·3	0·6179	1·3	0·9032	2·3	0·9893	3·3	0·9995
0·4	0·6554	1·4	0·9192	2·4	0·9918	3·4	0·9997
0·5	0·6915	1·5	0·9332	2·5	0·9938	3·5	0·9998
0·6	0·7257	1·6	0·9452	2·6	0·9953	3·6	0·9998
0·7	0·7580	1·7	0·9554	2·7	0·9965	3·7	0·9999
0·8	0·7881	1·8	0·9641	2·8	0·9974	3·8	0·9999
0·9	0·8159	1·9	0·9713	2·9	0·9981	3·9	—

Medelst formeln (12) beräknar man den »riskreserv», $\lambda - m$, som man behöver hava utöver riskpremien för att ernå den genom λ och p karaktäriserade säkerheten mot förluster genom dödligheten. Några exempel hava sammanställts i följande tabell. Riskpremien m beräknas med tillhjälp av (11) och medelrisken σ medelst formeln (10).

1	2	3	4
Riskreserv $\lambda - m$, uttryckt i multipel av medelrisken σ	Sannolikheten för att den i kol. 1 upptagna riskreserven skall erfordras	Sannolikheten för behovet av den i kol. 4 upptagna riskreserven	Riskreserv $\lambda - m$ uttryckt i multipel av σ
0·5 σ	0·3085	0·1	1·27 σ
1·5 σ	0·0668	0·01	2·32 σ
2·5 σ	0·0062	0·001	3·10 σ
3·5 σ	0·0002	0·0001	3·70 σ

Om riskreserven uppgår till 3.7 gånger medelrisken, är alltså sannolikheten = 0.0001 för att denna skall, jämte riskpremierna, behöva tagas i anspråk för utbetalningar för dödsfall.

Ehuru riskteorien förekommit på dagordningen vid de internationella aktuariekongresserna åren 1898, 1909, 1912 och 1930, har denna teori knappast vunnit någon tillämpning i praktiken. För att skydda sig mot variationer i dödligheten har man nöjt sig med de anordningar, som i det föregående angivits vid premie- och reservberäkningen och vilka synas vara tagna på måfå.

Professor GULDBERG framhåller i sitt förut omnämnda inlägg i frågan vid aktuariekongressen i Stockholm 1930, att om bolagen eftersträva grunder, som så nära som möjligt ansluta sig till de verkliga förhållandena, är det av synnerlig vikt att kunna bedöma den grad av osäkerhet, som vidlåder premier och premiereserver. Därigenom möjliggöres ock nedbringandet av behållningen och därmed även av bolagens beskattning.

(Forts.)

De fotoelektriska cellerna.

Av T. E. AURÉN.

Fotoelektriciteten innefattar grupper av företeelser, som till synes kunna vara ganska olikartade men som dock ytterst bero på en och samma orsak, nämligen avsöndring av elektroner genom inverkan av ljusenergi. Det primära förloppet, elektronemissionen, är jämförelsevis enkelt, men de sekundära verkningarna kunna bliva mycket komplicerade. Numera råder väl knappast delade meningar om, att förloppet vid omvandlingen av ljusenergien i rörelseenergi hos elektronerna riktigt återgives genom Einsteins berömda ekvation:

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = h(\nu - \nu_0).$$

Ett ljuskvantum $h\nu$ absorberas, varvid en elektron utlöses, men hela den absorberade energimängden övergår icke fullständigt i kinetisk energi utan en del ($h\nu_0$) åtgår för det arbete, som erfordras för att lösgöra elektronerna, ett »avsöndringsarbete» således, som vid olika metaller är olika och som även beror av huruvida elektronemissionen sker i vakuum eller i gasfyllt rum. Frekvensen hos det infallande ljuset måste, för att den fotoelektriska effekten skall uppkomma, överskrida ett visst »tröskelvärde». T. ex. för natrium är detta tröskelvärde i vakuum $5{,}15 \cdot 10^{14}$ svängningar per sekund, vilken frekvens motsvarar grönt ljus. Bestrålas natrium med rött ljus, emitteras sålunda inga elektroner, medan däremot blått ljus framkallar denna effekt.

De fotoelektriska celler, som hittills varit i bruk, basera sig på den primära fotoelektriska effekten. Vid belysning av en metallyta utsändas elektroner, och om en spännings-

skillnad anbringas mellan metallen och en elektrod i dess närhet, kan en elektrisk urladdning komma till stånd. Den fotoelektriska effekten framträder kraftigast vid alkalimetallerna (Li, Na, K, Rb, Cs), och det är därför företrädesvis alkaliceller, som kommit till användning. Konstruktionen av en sådan cell är enkel. Ett mindre, slutet glaskärl — då fråga är om ultraviolett strålning användes uviolglas eller kvarts — av sfärisk eller annan form (Fig. 1), som antingen är lufttomt eller fyllt med en inaktiv gas (vanligen argon) av lågt tryck, är på insidan delvis belagt med ett tunt skikt av alkalimetall. Metallskiktet kan utåt sättas i ledande förbindelse med mätinstrument. Känsligheten hos metallskiktet kan avsevärt stegras därigenom att ytan hydreras, vilket åstadkommes med tillhjälp av glimljusurladdningar i en atmosfär av vätgas. Härvid färgas ytan grön, blå eller brun, beroende på bildningen av en hydrid av metallen. Känslighetsområdet är i regel utsträckt över en större del av spektret, men maximikänsligheten faller för olika metaller vid olika våglängder. Den mest använda metallen är kalium, vars känslighetsmaximum faller inom det blåa spektralområdet. Framför metallskiktet anbringas en från detsamma isolerad elektrod, som vanligen har formen av en ring, understundom med ett i densamma utspänt metalltrådsnät.

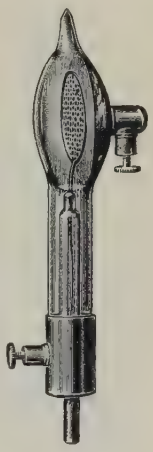


Fig. 1.

Då cellen skall användas, förbindes antingen metallskiktet med en elektrometer och laddas negativt samt elektroden med jorden eller införes med tillhjälp av ett batteri, vars negativa pol förbindes med metallskiktet, en spänningsskillnad mellan metallskiktet och elektroden, och en känslig galvanometer inkopplas i ledningen. Den vid belysning av metallskiktet uppkomna strömmens styrka beror dels på spänningsskillnaden dels pa belysningens intensitet. Vid tillräckligt hög spänning (150 à

200 volt) uppnås mättningsström, och strömstyrkan blir då uteslutande beroende av belysningens intensitet. Vid mätningar med fotoelektriska celler användes vanligen mättningsström, men i vissa fall har det visat sig fördelaktigt att använda spänningar långt under mättningsspänningen, särskilt är detta fallet vid kontinuerliga mätningar av dagsljuset. Vid stark belysning kan strömstyrkan uppgå till omkring 10^{-6} ampère, men om man önskar, att cellen skall bibehålla sin känslighet oförändrad, bör belysningen med tillhjälp av bländare avpassas så, att strömstyrkan hålles vid mycket låga värden. Vid kaliumceller har det visat sig att, om strömstyrkan icke överstiger 10^{-8} ampère, känsligheten under lång tid kan hålla sig mycket konstant. I Stocksund hava sålunda dylika celler sedan fem år tillbaka oavbrutet varit i bruk för registrering av belysningen från sol och himmel utan att känsligheten nämnvärt ändrats.

Enligt en av Lenard funnen lag — från vilken avvikelser visserligen påvisats vid vissa gasfyllda celler, men vars giltighet för evakuerade celler genom många försök bekräftats och befunnits gälla inom mycket vida gränser i fråga om ljusintensiteten — är elektronemissionen och därmed den alstrade strömmen proportionell mot belysningen. Härpå beror cellernas stora användbarhet vid fotometriska mätningar. En värdefull egenskap hos de fotoelektriska cellerna är den, att den fotoelektriska effekten inom det temperaturområde (till omkring 800°) som undersökningarna omfattat, är fullständigt oberoende av temperaturen. Då därtill kommer, att ifrågavarande effekt saknar tröghet, d. v. s. att den mot belysningen svarande elektronemissionen ögonblickligen uppkommer, så är dess stora betydelse för ett flertal både vetenskapliga och tekniska behov lätt insedd. Utrymmet medger icke att närmare ingå på användningen av de fotoelektriska cellerna. Jag inskränker mig till att erinra om deras betydelse för ljudfilmen och bildöverföringen. En populär redogörelse härför lämnas t. ex. i lektor Herlins förträffliga lilla arbete »Elektricitet till husbehov».

Att hålla kvantteorien utanför skolfysiken torde med var dag som går bliva allt mer omöjligt. En enkel framställning av huvudtankarna i denna för den modärna fysiken fullständigt oumbärliga teori torde väl i samband med strål ningsläran kunna lämnas åtminstone på reallinjen. Några enkla experiment beträffande den fotoelektriska effekten torde här kunna vara på sin plats. Säkerligen skulle eleverna också lätt förstå kvantteorins tillämpning på ifrågavarande fenomen så, som detta uttryckes genom den Einsteinska lagen. En för skolförsök särdeles lämplig fotoelektrisk cell inmonterad i ett passande hölje på stativ finnes tillgänglig i marknaden [1] (Fig. 2). Det aktiva metallskiktet sättes i förbindelse med ett elektroskop, som uppladdas, t. ex. med tillhjälp av en gniden lackstav. Elektroden liksom höljet sättes i förbindelse med jorden. På höljet finnes en liten lucka anbragt, som kan vridas åt sidan, så att ljus kan träffa metallskiktet. Som ljuskälla kan dagsljuset eller en glödlampa användas. Vid belysningen urladdas elektroskopet mycket hastigt. Experimentet är synnerligen lätt att utföra och tar föga tid.

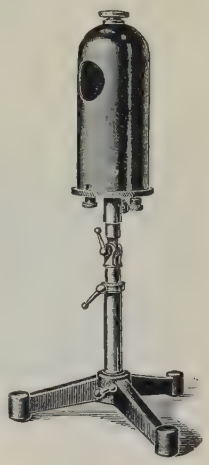


Fig. 2.

Sedan några månader finnes en ny form av fotoelektrisk cell, den s. k. kopparoxidulcellen, i marknaden. Från teoretisk synpunkt är denna cell av mycket stort intresse, och sannolikt kommer den också att få stor praktisk betydelse. Kopparoxidulcellen grundar sig på den s. k. spärrskiktfotoeffekten, en effekt som tidigare iakttagits, sedermera bortglömts och slutligen åter upptäckts. Effekten består däruti att, då vissa ämnen belysas, inuti desamma uppkommer en elektromotorisk kraft, en s. k. fotomotorisk kraft. Att en E. M. K. kan komma till stånd

[1] Se Rudolph Graves katalog n:r 9081.

förklaras genom antagandet av ett s. k. spärrskikt av stort motstånd, vilket tillskrives egenskapen att vara unipolärt ledande, d. v. s. ström kan genomsläppas endast i ena riktningen. De under ljusets inverkan avsöndrade elektronerna kunna tränga igenom spärrskiktet, varigenom en spänningsskillnad mellan skiktets båda sidor uppkommer. Om de båda sidorna genom en ledare sättas i förbindelse med varandra, uppkommer således en ström utan att någon yttre strömkälla erfordras. Hos kopparoxidulen är ifrågavarande effekt synnerligen utpräglad, men även andra ämnen, t. ex. selen hava samma egenskap. Effekten kan uppträda icke blott vid baksidan av det ljuskänsliga skiktet, således vid övergången mellan t. ex. ett kopparoxidulskikt och den kopparskiva, på vilken skiktet är anbragt, utan även vid framsidan, om detta är överdraget med ett tunt genomskinligt lager av någon lämplig metall. Av de nu tillgängliga cellerna synas de, som bero på »framsideeffekt» vara att föredraga, emedan de äro mindre känsliga för temperaturvariationer än celler, som äro konstruerade för »baksideeffekt». De i handeln tillgängliga kopparoxidulcellerna bestå av en liten kopparskiva, som är överdragen med ett mycket tunt lager kopparoxidul. Den av firman Siemens tillverkade typen (Fig. 3)[1] är baserad på framsideeffekt och har en aktiv yta av ungefär 2,8 cm^2. Kopparoxidulskiktet är på övre sidan överdraget med en ytterst tunn, genomskinlig hinna av guld. Kopparskivan och guldhinnan stå i ledande förbindelse med ett par kontaktskruvar, och det hela är inneslutet i en liten kapsel med en öppning, som täckes av en genomskinlig celluloidskiva. Vid en belysning av 100 lux ger denna cell, då det

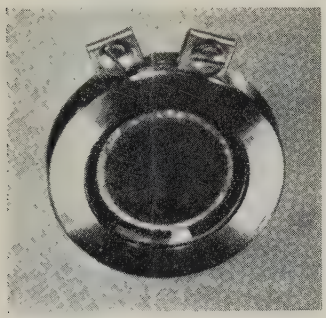


Fig. 3.

[1] Grave n:r 9083.

yttre motståndet är 1000 ohm, en ström av omkring $6 \cdot 10^{-7}$ ampère. Beträffande cellens egenskaper för övrigt föreligger ännu otillräcklig erfarenhet. Dess känslighetsmaximum uppgives ligga i det gulgröna spektralområdet, och känslighetskurvan uppgives nära motsvara ögats. Känsligheten synes åtminstone vid stark belysning icke vara fullt konstant. S. k. trötthetsfenomen uppträda alltså, vilket i vissa fall torde inskränka cellens användbarhet vid oavbrutet fortgående fotometriska mätningar. Emellertid äro med all sannolikhet nya och förbättrade typer att förvänta.

Utan hjälp av någon slags yttre strömkälla erhålles vid kopparoxidulcellen elektrisk ström. Att här icke är fråga om någon slags termoeffekt har konstaterats genom mycket sorgfälliga försök. Således omvandlas vid denna cell strålningsenergi omedelbart i elektrisk energi. I själva verket har icke tidigare någon sådan omvandling iakttagits. Omvandlingen från strålningsenergi till elektrisk energi sker i alla andra kända fall icke direkt utan över andra energiformer. En omvandling av solstrålningen i elektrisk energi erbjuder ingen svårighet, om det också f. n. endast kan verkställas som ett laboratorieexperiment. Vid Siemens laboratorium i Berlin förevisas för intresserade en kopparoxidulcell, som belyses med solljus och som ger tillräcklig ström för att hålla en liten motor i gång. Men från detta experiment och till det praktiska och ekonomiska utnyttjandet av effekten för tillgodogörande av solenergien är givetvis ett mycket stort steg. Dock, vem vågar påstå att något är omöjligt.

Friedrich Bergius

Carl Bosch

Nobelpriset i kemi 1931.

Det är två problem inom den kemiska tekniken, vilkas lösning måste anses hava varit betydelsefullare än alla andra under de senare decennierna. Det ena har gällt att tekniskt och ekonomiskt lösa frågan om luftkvävets fixering och det andra har varit spörsmålet att säkerställa världsbehovet av flytande bränslen.

Den första frågans enorma betydelse insågs, när det började bliva klart, att chilesalpetern med den åtgång, som var nödvändig för lantbruket, inom relativt kort tid skulle vara förbrukad. Den enda kvävekälla, som kunde komma ifråga för täckande av behovet var luftkvävet. Flera forskare började då att intensivt studera möjligheterna för luftkvävets fixering. Det första stora framsteget inom området var Birkeland-Eydes metod att förbränna kvävet i en elektrisk ljusbåge. En annan metod av stor betydelse var

fixeringen av kvävet i form av kalciumcyanamid (kalkkväve). Den tredje och rationellaste vägen anvisades först av FRITZ HABER och bestod i kvävets bindning med vätgas under högt tryck och hög temperatur till ammoniak (1908). Denna viktiga upptäckt belönades år 1918 med nobelpriset.

Haber hade emellertid utfört sin ammoniaksyntes endast i laboratorieskala, och hans insats kan sålunda endast tillmätas betydelsen av ett vetenskapligt bevis för syntesens genomförbarhet. Därmed var det ingalunda säkert, att det skulle lyckas att genomföra processen i stort och göra den räntabel. Haber hade lyckats intressera Badische Anilin- und Sodafabrik att söka tekniskt lösa ammoniakframställningen, och ledningen av dessa försök anförtroddes åt CARL BOSCH. Man kan med skäl beteckna det som en stor tur, att fabriken hade hos sig anställd en person med nödiga kvalifikationer för detta svåra uppdrag.

Redan som skolpojke och student visade Bosch en utpräglad praktisk begåvning, som han förkovrade genom lång praktik i olika verkstäder och till sist genom att under 3 år studera maskinbyggnad vid tekniska högskolan i Berlin. Bosch hade utbildat sig till en perfekt apparat- och maskinkonstruktör, innan han tog itu med kemistudierna. Efter ett par år förvärvade Bosch doktorsgraden vid universitetet i Leipzig med en avhandling inom den rena organiska kemins område. Efter något års anställning som universitetsassistent inträdde Bosch år 1899 i Badische Anilin- und Sodafabrik som kemist. Han hade förmånen att komma in på indigoavdelningen och få till chef den bekante RUD. KNIETSCH, kontaktsvavelsyreprocessens skapare. Indigofabrikationen befann sig vid den tidpunkten i rask utveckling, så att Bosch genast fick tillfälle att visa sin eminenta duglighet vid konstruktionen av nya apparater och införandet av nya metoder.

Ammoniaksyntesens tekniska förverkligande, som Bosch 1908 fick sig förelagd, var en gigantisk uppgift. Man måste ge sig in på ett helt nytt område, då som bekant ammoniak-

syntesen måste genomföras vid 200 atmosfärers tryck vid ca. 600° temperatur. Den tiden saknade man totalt erfarenhet om olika materials förhållande under dessa betingelser och om huru apparater skulle byggas, så att de motsvarade anspråken. Här är icke platsen att ingå på några detaljer. Det förtjänar dock framhållas som synnerligen anmärkningsvärt, att det lyckades Bosch, trots ofantliga svårigheter, att inom loppet av några år genomföra processen i kommersiell skala. När världskriget utbröt, framställdes redan stora mängder ammoniumsulfat ur syntetisk ammoniak. Den första fabriken hade anlagts i Oppau i närheten av Ludwigshafen. Under trycket av förhållandena utbyggdes Oppaufabriken till allt större produktion, och enligt samma schema anlades i Leuna vid Merseburg en ammoniakfabrik av väldiga mått. På förvånansvärt kort tid kom denna anläggning i gång, vilket bevisar huru väl allt var genomarbetat dessförinnan.

Det låg i sakens natur, att Boschs framgång måste föra honom fram från den blygsamma post, han i början innehade till allt högre tjänsteställning i sin firma. 1919 utnämndes han till chef för Badische Anilin- und Sodafabrik. När en sammanslutning ägde rum till den stora färgtrusten I. G. Farbenindustrie, blev Bosch dess ledare.

Det andra stora problemet, oljeframställningen, aktualiserades senare än kvävefrågan. Problemets betydelse har ökats med varje år på grund av den oanade omfattning som olja och flytande bränslen fått i det moderna samhället, framkallad av autobilismens hastiga utveckling och den allt större användning, som oljorna fått för fartygsdriften.

Oljans mycket ojämna fördelning på de olika kontinenterna och länderna samt den omständigheten, att man måste räkna med att de naturliga oljekällorna vid den enorma förbrukning av olja, som nu äger rum, inom överskådlig tid kunna vara uttömda, har på senaste tid i allt högre grad

stimulerat intresset för att söka en ersättning för bergoljan.

Om man tänker sig in i detta problem, finner man, att det enda material, som i större utsträckning kan komma ifråga härför, är kol. Friedrich Bergius torde ha varit en av de första, som insett detta. Han inriktade sina undersökningar på att finna en metod att överföra kolet i »flytande» form genom att anlagra väte därtill. Det visade sig nödvändigt att gå upp til en temperatur av över 400° och ett tryck av 100 atmosfärer för att detta skulle lyckas. Kolet övergick då till stor del i en vätska, påminnande om petroleum. Men därmed hade endast en ringa del av problemet lösts. Det tekniska genomförandet av processen visade sig vara förenat med betydande svårigheter, svårigheter, som t. o. m. i vissa fall kunna anses större än dem Bosch hade haft att kämpa med vid ammoniaksyntesen. Därvid arbetar man med högkomprimerade gaser, som ju kunna transporteras genom apparaturen på ett relativt enkelt sätt. Vid överförandet av kol i olja däremot reagerar vätgasen med fast kol under bildning av oljor och gaser, och denna heterogena blandning måste kontinuerligt strömma genom apparaturen vid möjligast konstant temperatur. Även problemet att kontinuerligt införa kolet i denna högtrycksapparatur under reaktionens gång erbjöd betydande svårigheter.

Efter åtskilligt experimenterande lyckades Bergius till sist bliva herre över alla svårigheter och bedriva metoden i stor skala. (Mannheim-Rheinau.)

Det visade sig vid dessa försök, att icke alla kolsorter äro likvärda. De kolslag, som äro mycket kolrika, de s. k. antracitiska, äro icke lämpliga för processen. De flesta andra stenkol ävensom brunkol lämpa sig däremot bra härför. Utbytena kunna likväl variera. Som ett exempel på ett hydreringsresultat kan nämnas, att av 1 ton »gasflamkol» med 6% aska erhöllos: 525 kg oljor, 240 kg koks, 235 kg gas. Oljan bestod till ca. en tredjedel av bensin, till omkring hälften av diesel- och smörjoljor samt resten förnäm-

ligast av brännolja. Av de stora gasmängder, som bildades vid processen, till största delen bestående av metan och etan, framställdes vätgas genom omsättning med vattenånga vid hög temperatur. Den så erhållna vätgasen är visserligen ej ren, men det är här ej heller såsom exempelvis vid ammoniaksyntesen nödvändigt. På så sätt framställd, blir vätgasen naturligtvis mycket billig, vilket är ett villkor för metodens räntabilitet.

Bergius' metod, »bergin»-metoden, kan givetvis även begagnas för framställning av lättkokande oljor ur tyngre och kommer sålunda ifråga, när det gäller att framställa bensin ur tyngre oljefraktioner.

I. G. Farbenindustrie förvärvade för omkring 4 år sedan berginprocessen, sedan de övertygat sig om dess betydelse. Där har den vidare utvecklats förnämligast genom införande av speciella katalysatorer, varigenom reaktionshastigheten väsentligen ökats. Sedan ett antal år är en mycket stor fabrik i gång i Leuna, vars kapacitet i början uppgick till ca. 250 000 ton bensin pr år. Nu torde dess produktionsförmåga hava ökats betydligt tack vare användningen av lämpligare katalysatorer. Även på andra håll inom och utom Europa har man uppfört mindre anläggningar för hydrering av kol och olja. Bergius' metod kan givetvis vid nu gällande katastrofalt låga bensinpris ej arbeta ekonomiskt, men i Tyskland åtnjuter det av I. G. framställda bensinet ett så högt tullskydd, att fabrikationen lönar sig. Vid normala bensinpris är metoden fullt konkurrensduglig.

På grund av vad sålunda anförts, är det uppenbart, att de båda ovannämnda så betydelsefulla problemen fått sin ekonomiska lösning genom Bosch's och Bergius' insatser. Framgången har vunnits genom införande och utbildande av högtryckstekniska metoder i den kemiska industrien. Det är därför berättigat, att de dela äran av årets nobelpris i kemi.

Erik Hägglund.

Ett experiment till belysning av Avogadro's lag.

Av BROR GUSTAVER.

De enkla volymsproportionerna vid gasreaktioner verifieras enligt läroböcker i kemi antingen med reaktionen mellan klor och väte:

$$H_2 + Cl_2 = 2HCl,$$

eller med reaktionen mellan väte och syre:

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O.$$

Båda dessa reaktioner äro förbundna med experimentella svårigheter. Den första utföres så, att klor får förtränga luften i ett till minst $^4/_5$ med kvicksilver fyllt eudiometerrör, varvid kvicksilvret skyddas med ett tunt lager av konc. svavelsyra; röret föres i omvänt läge ned i kvicksilver, varefter vätet införes underifrån. Efter explosion skall volymen av gasen vara oförändrad. Klor angriper emellertid kvicksilver hastigt, och svavelsyran erbjuder intet effektivt skydd. Klorgasen är för övrigt löslig i konc. svavelsyra. Närvaro av även minimala mängder vattenånga i gasen gör, att det bildade klorvätet tack vare sin stora löslighet i vatten får för liten volym. Även klorväte löser sig dessutom i konc. svavelsyra. Vanskligheten i reaktionen mellan väte och syre ligger däri, att den bildade vattenångan lätt kondenseras, så att den funna gasvolymen blir för liten. Det erfordras även en rätt dyrbar specialapparat för försöket.

Frågan är då, om det ej finns någon annan gasreaktion, som kan utföras med enklare apparatur än försöket med

knallgas och som ger säkrare värden än försöket med klor och väte. Märkligt nog tycks ingen förut ha kommit på den idén att pröva reaktionen mellan kolmonoxid och syre:

$$2CO + O_2 = 2CO_2.$$

Författaren till dessa rader har uppmätt denna gasreaktion och skall här nedan redogöra för anordningen av försöket och resultatet.

Kolmonoxid framställdes ur oxalsyra och koncentrerad svavelsyra, som upphettades i en fraktionskolv till 70 à 80°, varvid en jämn och rask gasutveckling ägde rum:

$$H_2C_2O_4 = CO + CO_2 + H_2O.$$

Gasen fick passera tre tvättflaskor med 20 %-ig kalilut, varvid koldioxiden absorberades. Först leddes gasen ut i avdrag, tills all luft säkert var utdriven, och samlades sedan upp i en gasometer om cirka 3 liters rymd. Eudiometerröret, som var graderat i mm (30 cm långt) [1], gjordes noga rent, fylldes med kvicksilver och placerades i omvänd ställning i kvicksilver i en mindre, parallellipipedisk, tjockväggig glasburk (rymd cirka 100 cm^3). Denna placerades i en större skål av emaljerad plåt. Nu infördes i explosionsröret något koloxid (3 à 4 cm) från gasometern. Gasen torkades i ett klorkalciumrör, och vid det sista försöket (nr 4) var den till gasometern kopplade skänkeln av U-röret fylld med asbest, som dränkts in med 50 %-ig kalilut. Det visade sig nämligen vid ett kontrollförsök, att koloxiden ännu innehöll 6,2 % koldioxid. Barometerstånd och undertryck i explosionsröret uppmättes, och volymen vid 760 mm kvicksilvertryck räknades ut. För temperaturen gjordes inga korrektioner, då rummets temperatur under samtliga försök

[1] Eudiometerrören graderas antingen i längdmått (cm och mm) eller volymmått (cm^3). Med den förra graderingen erhålles kvicksilverpelarens höjd direkt i mm. I det närmaste torde rörets volym vara proportionell mot dess längd.

var konstant 18°. Nu infördes syre, som togs ur en syrgasbomb. Den införda syrgasvolymen avpassades till ungefär hälften av koloxidens volym. Att införa exakt en önskad mängd gas var ej möjligt; visserligen kunde gasströmmen både från gasometern och från bomben regleras mycket bra, men varje bubbla, som trängde upp genom kvicksilvret, upptog cirka 2 cm i eudiometerröret. Hela den införda gasvolymen mättes och reducerades till 760 mm Hg. Explosionsröret fördes nu ned till nära bottnen i den parallellipipediska glasburken med kvicksilver, fästes stadigt i ett stativ, på vars platta placerades en tung blyklump, kvicksilverytan täcktes med en pappskiva, varjämte en handduk virades omkring, och induktoriet sattes i gång. I de tre senare försöken (2, 3 och 4) inträffade explosionen så gott som ögonblickligt, varvid kvicksilvret i röret hastigt pressades ned och kvicksilvret i kärlet råkade i häftig svallning. Det är tillrådligt att ej ha mer än cirka 10 cm gas i röret, d. v. s. högst $^1/_3$ av rörets längd, emedan eljest på grund av reaktionens häftighet gas kan tränga ut eller luft komma in, vilket också var fallet vid mitt försök nr 3. Då var ej heller stativet belagt med den nyss omtalade blyvikten, och försöket misslyckades, varjämte en glasskål av tunt glas, som då användes i stället för den emaljerade skålen, splittrades av reaktionstrycket och kvicksilver stänkte omkring. Vid försök 1 exploderade ej gasen, vilket möjligen berodde på att koloxiden innehöll luft och var för mycket utspädd. Emellertid ägde reaktion rum mellan CO och O_2, ty volymen avtog, medan gnistorna från induktoriet slogo igenom, till en början hastigt sedan allt långsammare, så att efter 3 timmar ingen vidare volymminskning kunde iakttagas. Troligen fortgick reaktionen till ett jämviktsläge, då ju koldioxid vid högre temperatur och det relativt låga tryck, som rådde i explosionsröret, är avsevärt dissocierad i koloxid och syre. För att vara säker på att gasblandningen skall explodera, bör man därför driva ut luften fullständigt ur torkröret, innan koloxiden införes i

eudiometerröret, och se till, att syrevolymen blir ungefär hälften av volymen koloxid.

Vid explosionen minskas gasvolymen, och denna mätes upp och reduceras till 760 mm Hg. Avläsningen bör ej ske tidigare än cirka 15 minuter efter explosionen, så att temperaturen hinner utjämnas. Nu införes i röret med en liten tryckpipett (ett vinkelböjt, till en spets utdraget glasrör med en gummislang) litet stark kalilut. Därvid stiger kvicksilvret hastigt i röret på grund av att koldioxiden absorberas. Detta sker tämligen raskt och underlättas genom skakning av röret. Vid beräkning av den till 760 mm Hg reducerade, återstående gasvolymen bör hänsyn tagas till trycket av vattenånga över kalilut (Chemiker-Kalender). Nu införes i röret litet koncentrerad vattenlösning av pyrogallol, varvid, om överskott på syre finnes, detta absorberas och luten färgas mörkbrun. Är den återstående gasvolymen liten och om röret skakas, så är syrgasabsorptionen fullbordad på 10 à 15 minuter. Den återstående gasvolymen avläses och reduceras till 760 mm tryck, likaledes under hänsynstagande till vattenångans tryck över kalilut.

Resultaten av de av mig utförda 4 försöken framgå av nedanstående tabell.

Reducerad gasvolym	Försök n:r							
	1			2			4	
	a	b	c	a	b	c	a	c
Infört CO	4,06		4,77	2,80		3,30	1,75	2,05
» $CO + O_2$	8,59		10,30	5,26		6,29	5,14	6,15
Efter explosion	7,43		8,90	4,23		5,04	3,89	4,62
» absorption med KOH	4,99		5,94	1,90		2,25	1,41	1,63
» absorption med pyrogallol	1,52		1,70	0,49		0,52	0,95	1,04
Åtgått CO	2,54	2,17	2,63	2,31	2,13	2,57	2,44	3,06
Åtgått O_2	1,06	1,18	1,43	1,05	1,05	1,26	1,29	1,46
Bildats CO_2	2,44	2,19	2,66	2,33	2,15	2,58	2,48	2,99
Volymsminskning	1,16	1,16	1,40	1,03	1,03	1,25	1,25	1,53
Åtgått $CO + O_2$	3,60	3,35	4,06	3,36	3,18	3,83	3,73	4,52
1/3 därav	1,20	1,12	1,35	1,12	1,06	1,28	1,24	1,51

Explosionsröret var graderat i cm, och värdena a och b hänföra sig till denna gradering; b-värdena i försöken 1 och 2 äro reducerade med hänsyn till att koloxiden från början innehöll 6,2% koldioxid. Alla c-värden äro uttryckta i cm^3, och de ha erhållits så, att explosionsrörets volym uppmätts med tillhjälp av en byrett. Det var nämligen tydligt, att på grund av rörets rundning vid den tillsmälta änden volymen ej var exakt proportionell mot längden. Detta fel inverkar procentuellt mest vid uppmätning av mycket små volymer.

Vid en granskning av de erhållna resultaten finner man, att volymsminskningen vid explosionen är lika stor som den åtgångna syrgasvolymen och lika med $^1/_3$ av den gasblandning koloxid och syre, som deltar i reaktionen. Den bildade volymen CO_2 är lika stor som den åtgångna volymen CO. Differenserna ligga överallt inom försöksfelen och utgöra endast några få hundradelar eller lika många procent. Betänker man så, att avläsningen skett på 0,05 cm när, så måste man säga, att resultaten äro mycket goda. Är allt i ordningställt på förhand, bör explosionen och införandet av kalilut och pyrogallol medhinnas på en lektionstimme. Försöket erbjuder knappast några större svårigheter i experimentellt avseende och ej heller någon risk, om man iakttar de ovan påpekade försiktighetsåtgärderna. Dock bör risken av arbete med koloxid pointeras; framställningen av gasen och införandet därav i eudiometerröret bör ske vid ett bra avdrag och rummet omsorgsfullt vädras efteråt.

En not till heltalsteorien.

Om m, n och p äro hela tal, så är $(m^2 + n^2)^p = x^2 + y^2$, varvid x och y även äro hela tal.

Sätter man nämligen

$$(m^2 + n^2)^p = [(m^2 - n^2)\,a_1 + 2mnb_1]^2 + [(n^2 - m^2)\,b_1 + 2mna_1]^2, \quad (1)$$

får man efter förenkling av högra membrum

$$(m^2 + n^2)^p = (a_1^2 + b_1^2)(m^2 + n^2)^2, \qquad (2)$$

alltså

$$a_1^2 + b_1^2 = (m^2 + n^2)^{p-2}.$$

Nu kan man åter sätta

$$(m^2 + n^2)^{p-2} = [(m^2 - n^2)\, a_2 + 2mnb_2]^2 + [(n^2 - m^2)\, b_2 + 2mna_2]^2,$$

varav

$$a_2^2 + b_2^2 = (m^2 + n^2)^{p-4}.$$

Detta förfaringssätt kan upprepas hur många gånger som helst, till dess man får antingen

$$a^2 + b^2 = 1 \text{ eller } a^2 + b^2 = m^2 + n^2,$$

beroende på, om p är ett jämnt eller ett udda tal.

I förra fallet är $a = 1$ och $b = 0$ eller omvänt. Ekv. (1) ger då

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2. \qquad (3)$$

I senare fallet är $a = m$, $b = n$ (eller omvänt), eller kan man åt a och b giva andra ev. heltalsvärden, som göra

$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2.$$

Av ekv. (1) får man i detta fall

$$(m^2 + n^2)^3 = [(m^2 - n^2)\, a + 2mnb]^2 + [(n^2 - m^2)\, b + 2mna]^2. \qquad (4)$$

Utgår man från likheterna (3) och (4), kan man alltså successivt komma till vilken heltalsdignitet som helst av $m^2 + n^2$, uppdelad i summan av två heltalskvadrater.

Tag t. ex. $m = 3$, $n = 2$. Av (3) får man $13^2 = 5^2 + 12^2$.

Sättes nu ena gången $a = 12$, $b = 5$ och andra gången $a = 5$, $b = 12$, ger (1)

$$13^4 = 119^2 + 120^2 = 65^2 + 156^2.$$

Talen 119 och 120, 65 och 156 kunna nu i sin ordning insättas i (1) för a och b. Man får då

$$13^6 = 828^2 + 2035^2 = 845^2 + 2028^2 = 1547^2 + 1560^2$$

o. s. v.

Ekv. (4) ger oss

$$13^3 = 9^2 + 46^2 = 26^2 + 39^2,$$

därefter (1)

$$13^5 = 117^2 + 598^2 = 122^2 + 597^2 = 338^2 + 507^2,$$

o. s. v.

Carl Bodlund.

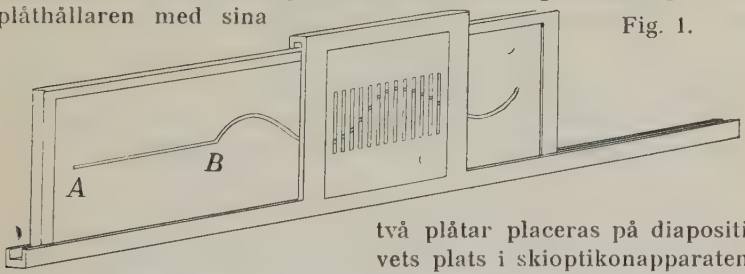
En enkel metod att demonstrera vågrörelse.

Det är en känd sak, att goda och samtidigt billiga apparater för demonstrering av vågrörelse äro tunnsådda. Här meddelas beskrivning på en enkel anordning med förhoppning att den vid skolor, där de knappa anslagen omöjliggöra anskaffandet av större apparater, skall kunna fylla ett behov. Den kan för ringa kostnad förfärdigas av varje intresserad och händig fysiklärare.

På ett stycke svart kartong (c:a 0,5 mm) av storlek som en vanlig diapositivplåt, (8 × 8 cm²) utskäras en rad, 8—16 st., parallella strimmor, 1 mm² breda. Kartongbiten klistras på en glasskiva. Som klister har »Pandetikon» visat sig vara fördelaktigt. Det torkar fort och fäster bra på glas.

På en annan kartongskiva av dimensionerna 8 × 24 cm² utskäres en millimeterbred strimma i form av en sinuskurva. Utskärandet kan lämpligen ske på följande sätt. En mall tillverkas av ett stycke tjock kartong, varvid sinuskurvan kan konstrueras på vanligt sätt med hjälp av den harmoniska svängningsrörelsen och sedan omsorgsfullt utklippas. Med hjälp av mallen och en skarp kniv kan den sinusformade strimman lätt skäras ut, varefter hela kartongstycket klistras på en glasskiva. De båda glasskivorna anbringas i var sin ram i enlighet med fig. 1. Om plåthållaren med sina

Fig. 1.



två plåtar placeras på diapositivets plats i skioptikonapparaten, så att den rätlinjiga delen (AB) på den större plåten kommer bakom den mindre plåtens parallella strimmor, så projicieras på skärmen en rad ljuspunkter, representerande den rad partiklar, genom vilken den transversella vågen skall gå fram. Då den större skivan med jämn hastighet förskjutes, kommer varje ljuspunkt att beskriva en harmonisk svängningsrörelse, och man ser vågberg och vågdalar skrida fram genom raden av partiklar. Begreppen rörelsefas och våglängd kunna tydligt åskådliggöras, likaså sambandet mellan våglängd och svängningstid.

Den longitudinella vågrörelsen kan demonstreras med den anordning, fig. 2 visar. Här måste den större glasskivan kunna

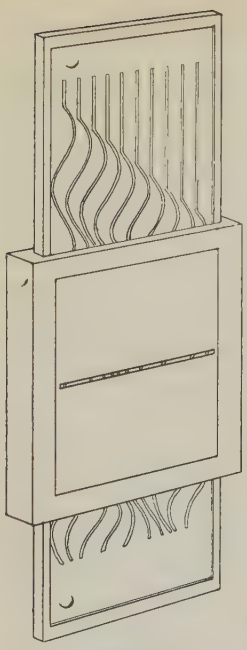


Fig. 2.

förskjutas i vertikal riktning, för att partikelraden skall komma att stå horisontellt på skärmen. Tillåter skioptikonapparaten icke detta, kan vågrörelsen demonstreras längs en vertikal partikelrad eller också, som fallet är vid härvarande skolas projektionsapparat, kan hela apparaten läggas på sidan. I båda dessa senare fall kan anordningen av ramarna vara densamma som i fig. 1. Den större glasskivan måste vara försedd med 8—10 sinsemellan fasförskjutna sinusformade strimmor, tillverkade på ovan berörda sätt. Längs raden av partiklar ser man vid den större skivans förskjutning förtätningar och förtunningar skrida fram.

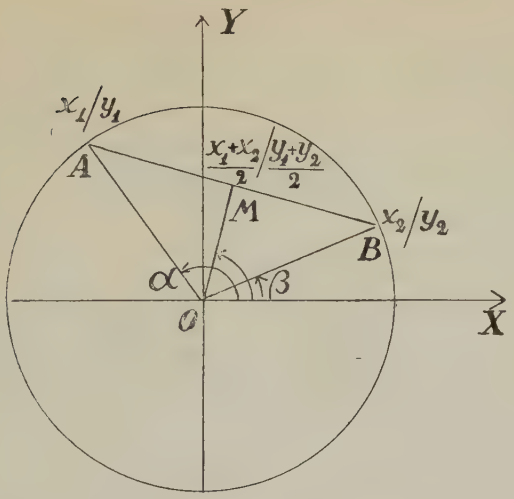
Står icke en skioptikonapparat till förfogande, bör samma princip för demonstreringen dock kunna användas. Man kan då tillverka en låda t. ex. av plywood i dimensionerna cirka $50 \times 20 \times 15$ cm³, invändigt beklädd med vitt papper och försedd med ett par glödlampor. På lådans framsida göres en rektangulär öppning, framför vilken skivorna med deras strimmor anbringas, nu tillverkade i större dimensioner. Tändas lamporna och förskjutes den större skivan horisontellt resp. vertikalt, kan även här den transversella resp. longitudinella vågrörelsen demonstreras.

Arvid Leide.

Trigonometriska formlers härledning.

Vid härledningen av de trigonometriska formlerna börjar man som bekant med beviset för subtraktionsteoremet för cosinus, ur vilket sedan alla övriga formler erhållas. Se här ett försök att bryta med denna tradition. Jag börjar med beviset för ett par av de s. k. produktformlerna.

Vinklarna α och β utsättas på vanligt sätt i en enhetscirkel O. Mot AB fälles höjden OM. Observeras att $\angle MOB = \frac{\alpha - \beta}{2}$ och $\angle MOX = \frac{\alpha - \beta}{2} + \beta = \frac{\alpha + \beta}{2}$, så erhålles omedelbart



$$\frac{x_1+x_2}{2} = OM\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\frac{y_1+y_2}{2} = OM\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

eller

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{1}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{2}$$

Om $\alpha-\beta>180°$, blir $\angle MOB = 180° - \frac{\alpha-\beta}{2}$ och $\angle MOX = 180° + \frac{\alpha+\beta}{2}$, varför formlerna bliva oförändrade. Den ena formeln kan naturligtvis härledas ur den andra, om man så önskar. Om i (2) β ersättes med $-\beta$, fås

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{3}$$

Sättes nu $\frac{\alpha+\beta}{2} = A$ och $\frac{\alpha-\beta}{2} = B$, så övergå (2) och (3) i

$$\sin(A+B)+\sin(A-B) = 2\sin A\cos B,$$
$$\sin(A+B)-\sin(A-B) = 2\cos A\sin B.$$

Genom addition och subtraktion fås härur additions- och subtraktionsteoremen för sinus, varefter övriga formler på sedvanligt sätt erhållas.

S. Bågman.

Bokanmälningar.

K.-G. Hagstroem, *Sagan om de tio tecknen.* Stockholm, Albert Bonnier 1931. 147 sid., häft. kr. 5:75.

I detta arbete har författaren till *Talens vetenskap* (anmäld i denna tidskr. årg. 13 sid. 38) upptagit till utförligare behandling tal- och siffersystemens historiska utveckling och särskilt frågan om positionssystemets uppkomst. Med en välfunnen symbolik kan han kort karakterisera de viktigaste lösningarna av problemen att benämna och beteckna talen (enkannerligen positionsprincipen), som mänskligheten nått fram till. Vidare behandlas aritmetiska operationer med penna och räkneinstrument från olika tider och *åtskilligt annat.* Allt detta göres med en imponerande beläsenhet och kombinationsförmåga och på ett klart och medryckande språk. I det första kapitlet påpekas att »i synnerhet historiker och filologer» äro bekajade med en illa dold aversion mot matematiken, »vetenskapernas drottning». Att däremot en matematiker kan vara filolog och historiker av rang blir snart klart för läsaren. I ord och ofta i bild ställes han inför prov från bortåt dussinet språk, vilka med suverän lätthet kommenteras och översättas (bl. a. en rigvedahymn till svensk vers), och de här och var inströdda kulturhistoriska notiserna och analyserna giva arbetet en särprägel och extra bouquet. I ett bihang har författaren sammanställt »de moderna siffrornas stamträd» som resultat av ett aktningsbjudande »etymosemiskt» arbete. Bokens förträffliga bildmaterial (skriftprov, abaci, jetonger, mynt m. m.) återgår på original eller förstahandsfotografier i stor utsträckning och är redan det ett bevis på förarbetets grundlighet. När författaren i huvudfrågan om de s. k. arabiska siffrornas (och positionssystemets) indiska ursprung deciderat ställer sig på hinduernas sida, sker det också efter ett mönstergillt framläggande av det faktiska bevismaterialet, så långt det räcker, och med klart angivande av var den egna »subjektiva fantasien» tar vid. Arbetet avslutas med en entusiastisk värdesättning av matematiskt tänkande i största allmänhet, varvid siffrorna naturligtvis få sig anvisade en underordnad, men ingalunda oviktig roll. I en not meddelas ett nytt sätt att angiva tidpunkt (i kronologien) och

tidsintervall, som förefaller ändamålsenligt. På sid. 15 läses, att skolmatematiken »ej sällan» meddelas av »en fantasilös och pedantisk lärare». Ack ja! Pedanteriet är kanske ej direkt opassande i matematikundervisningen. Vad fantasien angår, få vi andra vara glada, när bättre lottade dela med sig av sitt överflöd, och med tacksamhet anamma t. ex. Sagan om de tio tecknen.

Josef Andersson.

Georg Brochmann, *De store opfinnelser, forskning og fremskritt.* Nasjonalforlaget, Oslo, del I, II och III 1929, del IV, V och VI 1930, säljes endast komplett i 6 praktband, tillsammans kr. 45: —.

I detta verk, som upptar c:a 2500 sidor och ungefär lika många illustrationer, har den i Norge kända och uppskattade populärvetenskapliga författaren Georg Brochmann enligt hans egna ord sökt att ge en sammanhängande och lättläst framställning av teknikens utveckling på olika områden. De stora uppfinningarna äro i allmänhet icke gjorda av en enda. Förf. citerar George Stephenson, som då han en gång lyckönskades till att hava uppfunnit lokomotivet, svarade: »Lokomotivet har skapats av en nation av ingeniörer».

Genom en kortfattad historisk exposé inom de olika avdelningarna har författaren också velat framhålla, att det är vetenskapsmännens målmedvetna och ingående arbete, som lett till teknikens nuvarande höga ståndpunkt. Den avsevärt största delen av verket är dock ägnad åt nuvarande förhållanden. Då boken vänder sig till den naturvetenskapligt och tekniskt intresserade allmänheten, äro alla matematiska formler uteslutna.

Det är en mångfald av företeelser inom alla grenar av det praktiska livet, som möta läsaren i detta verk, och även om författaren synes ha haft hjälp av fackmän på olika områden, måste det sägas vara en verklig kraftprestation att genomarbeta dem alla.

Indelningen av det vidlyftiga stoffet är ganska originell. Det första bandet, som på norska benämnes »Erkjennelsens utvidelse» omfattar först och främst alla de instrument, som uppfunnits för att hjälpa och förstärka våra sinnesintryck. Under rubriken »synens utvidgning» behandlas de optiska instrumenten, vari även inlagts något om ljusets egenskaper och natur, dessutom fotografi, kinematografi, samt möjligheter att på olika sätt få kunskap om tingens inre medelst röntgenstrålar, polarimeter, optisk- och röntgenspektrografi. »Hörselns utvidgning» omfattar akustikens olika delar. I avdelningen om smak- och luktsinnena redogöres

för olika slag av ämnesanalys på kemisk såväl som på fysisk väg. Under »känselsinnets utvidgning» behandlas barometrar, vågar, dynamometrar, materialprövning, termometrar, nivåinstrument och kompasser, alltså en ganska brokig samling. Dessutom upptas som redskap för minnet olika slag av skrifter samt bibliotek, för tidsmätning kalendrar och klockor allt ifrån soluret till det moderna elektriska uret. Under »tankens redskap» ges en kort översikt av matematikens utveckling, av räknemaskiner, nomografiska metoder, planimetrar och andra i geometrien använda instrument.

I det andra bandet, benämnt »kraftèrnas utvidgning», beskrivas de försök, som människan sedan urminnes tider gjort för att behärska och till sin egen fördel använda energien i alla dess olika former. Det börjar med ett mycket välskrivet kapitel just om de olika energiformerna och deras övergång i varandra. Efter en översikt av de enkla maskinerna, hävstänger, block, lutande plan etc. följa utförliga beskrivningar på maskiner drivna med vatten, vind, värme och elektricitet.

Under rubriken »räckviddens utökning» omtalas i tredje delen, hur människan erövrat havet förmedelst alla slags fartyg från segelbåtar till de moderna oceanjättarne med deras inventiösa inredning, och hur hon efter att i århundraden förgäves ha sökt att behärska luften nu även blivit dess herre. Telegraf, telefon och radio tjänstgöra som hennes budbärare över hela världen.

Fjärde delen, om jordens utnyttjande, behandlar bland annat lantmätning, jordbrukets teknik, gruvdrift, utvinnande av metaller, jakt och fiske samt alla upptänkliga fortskaffningsmedel till lands.

Under den i detta sammanhang något oklara titeln »produktionens ökning» sysselsätter sig förf. i femte delen först med de ledande principerna för den industriella produktionen och upptar sedan såsom exempel olika slag av metall- och träarbeten, kläder, skodon, mat och dryck, varor i lera och glas samt några olika slag av kemisk industri.

I det avslutande sjätte bandet diskuterar förf. i vilken grad all denna verksamhet tagits i anspråk till nytta och glädje för människan i ett ändamålsenligt och vackert hem, där man njuter av konstens och teknikens alster, i ett välordnat samhälle, planerat och ordnat i god funktionalistisk mening, försett med gas, vatten, elektricitet och med möjligheter till god omvårdnad i alla avseenden.

Denna indelning av stoffet, som obestridligen har sitt stora intresse, medför dock vissa nackdelar, i det att företeelser, som

i sakligt avseende naturligt höra tillsammans, nu äro spridda på skilda avdelningar, vilka mången gång äro ganska svåra att fundera ut. Här må endast nämnas ett exempel. Elektriciteten behandlas huvudsakligen i del II och där på två ställen. I början av del III finner man fortsättning på elektriska maskiner, en följd av att man velat ha alla banden lika stora, och i slutet av samma del elektriciteten som budbärare, alltså telegraf, telefon och radio. I del I ha då på olika håll redan omtalats elektromagnetiska vågor, elektriska hörapparater och termometrar, som man där knappast ännu har förutsättning att förstå. Slutligen komma i del VI på skilda ställen elektriskt ljus, uppvärmning, elektriska installationer och elektricitetstransport. Denna splittring i behandlingen upphjälpes dock av att varje band är försett med en rätt utförlig innehållsförteckning jämte ett alfabetiskt register. Dessutom finns i slutet av sjätte bandet ett sammanfattande register över de viktigaste orden i hela verket.

Behandlingen av de elektriska företeelserna är den som i allmänhet synts anmälaren svagast. Man får t. ex. ingen riktig uppfattning av själva grundprinciperna för de elektriska maskinerna. Den Lenzska lagen omnämnes ej; det är egendomligt, då förf. på annat ställe så väl hävdar sambandet mellan skilda energiformer. Är det ett norskt bruk att kalla maskiner, som ge växelström generatorer och likströmsmaskiner dynamomaskiner? Historiken om de elektriska svängningarna är god, men för att förstå radion tarvas en utförligare redogörelse för de enklaste kopplingarna, och förklaringen av elektronröret del III sid. 392 är knappast i nivå med verket för övrigt. Kanske förf. anser, att det finns tillräckligt skrivet om radio på annat håll, men den knappa redogörelsen här synes ej riktigt stämma med förf:s egen uttalade önskan att vilja klargöra principerna. Men angående utförligheten i behandlingen av alla dessa gebit finnas nog lika många uppfattningar som det finns människor med olika intressen.

En avdelning, som är särskilt väl skriven, är den om värmemaskinerna. Det norska ordet »varmekraftmaskin» stöter ett svenskt öra och synes strida mot förf:s egen utläggning av ordet kraftmaskin sid. 67 och 68 del. II.

Bristande klarhet i redogörelsen förekommer nog även på en del andra ställen. Här några exempel: I del I vid tal om ljusets interferens har förbisetts, att ljuset vid reflexion mot ett tätare medium förlorar en halv våglängd, och sid. 53 böra strålarna AE och BE (ej CE) skilja på en halv våglängd. På samma sida förekommer också: »enheten angstrom (1 AE) = 1/100 av en μ»! På sid. 56 uppges solens strålningstryck vara 0,4 $\frac{mg}{cm^2}$, skall vara

$7 \cdot 10^{-5}$. Att i figuren sid. 57 längderna för de olika elektromagnetiska vågorna äro avsatta i oktaver behöver nog för mången läsare en närmare förklaring. Här må också påpekas, att den lucka, som är framställd i figuren mellan kortaste ultravioletta vågor och längsta röntgenvågor, på de senaste åren blivit fylld genom undersökningar i Uppsala under prof. Siegbahns ledning. Förklaringen på strålarnas gång i prismakikaren sid. 99 synes dunkel, likaså på den termoelektriska pyrometern sid. 277. På sid. 287 talas om ett vanligt gyroskop utan hänvisning till den beskrivning, som några sidor senare finnes på gyroskopet och som skulle gjort texten bra mycket lättfattligare. På samma sida införes också centrifugalkraften utan någon slags förklaring.

En del namn äro egendomligt stavade. Tysken Abbe har flera gånger fått accent på e; del I, sid. 161 talas det om Moeseby (Moseley) och Siegbaum.

Att i ett verk av så mångskiftande innehåll varje läsare skall på sitt område ha en del anmärkningar att göra, är väl nästan oundvikligt. I detta sammanhang må påpekas, att de tre sista banden kommit anmälaren tillhanda endast ett par dagar, innan detta skrives, varför en verklig genomläsning av dessa icke hunnit utföras.

Taget som helhet gör emellertid verket intryck av att vara både vederhäftigt, nyttigt samt i hög grad intresseväckande. Därtill bidrar ett ledigt och i allmänhet klart språk, ett ofta fängslande framställningssätt samt det mycket rikhaltiga illustrationsmaterialet. Många bilder äro riktigt goda med tydligt angivna beteckningar, men en del av fotografierna äro rätt suddiga. Man önskar ibland, att flera av dem tagits bort och ersatts av *en* tydlig eller en schematisk bild.

Det ligger i sakens natur, att illustrationer och installationsredogörelser ofta äro hämtade från Norge. Det minskar ju i viss mån intresset för ett annat lands läsare, och för ungdomen speciellt kan det därtill vara en nackdel, att få in fackuttrycken på ett främmande språk. I Sverige har dessutom på senare tid flera goda populära böcker skrivits om många av här avhandlade frågor. Men det ligger onekligen en stor fördel i att ha dem samlade i ett verk. Man måste ju även säga, att priset 45 kronor för dessa sex snyggt inbundna delar på vardera något över 400 sidor är fördelaktigt. Säkert skulle de också i våra skolors bibliotek finna många intresserade läsare både bland lärare och elever. Vissa partier av verket borde kunna ges åt praktiskt lagda elever till studium vid skolornas enskilda arbete.

Eva Ramstedt.

Helge Bohlin, *Gaslagarna*, elementär framställning jämte räkneövningar, A.-B. V. Åströms boktryckeri, Härnösand 1931. 48 sid., pris häftad kr. 1: 90.

Förf., lektor vid Tekniska läroverket i Härnösand, har känt bristen i de gängse läroböckerna i fysik och kemi av en sammanfattande, enhetlig framställning av gaslagarna, särskilt önskvärd vid de tekniska läroverken och seminarierna, och man kan nog instämma i att en sådan brist föreligger. Den framställning förf. ger omfattar det ideala gastillståndet och det elementäraste om angorna. Förf. har i varje kap. en avdelning text, lösningarna av ett par övningsexempel som tillämpning och till sist problem för lösning på egen hand. Texten är klar och genomtänkt och, så vitt vi kunnat finna, omsorgsfullt korrekt även i småsaker. Vad exemplen beträffar, äro de givetvis något schematiska, men detta är ingen anmärkning; det följer med deras elementära läggning. Ett par dussin stickprov ha givit samma resultat som förf:s facit; för de följande måste dock frågetecken sättas:

Ex. 11 och 66, endast en fråga av två är i facit besvarad.

Ex. 42, undertecknad erhåller värdet 0,00162 (0°,760 mm), ej 0,00179.

Ex. 57, gasen innehåller 39,9 % syre, ej 70,6 %. Redan ett ögonkast på de meddelade uppgifterna visar, att svaret i facit måste vara fel. En kemist skulle anmärka, att magnesium ur kväve-syre absorberar även (åtminstone en del) kväve.

Ex. 60, förf. har räknat med en vattenpelare av 27,2 mm i stället för uppgiftens lika många cm.

Dessa anmärkningar är obetydliga och skola icke skymma bort arbetets förtjänster. Vid de allmänna läroverken bör det kunna tjäna som underlag för ett enskilt arbete på detta område.

G. Starck.

Autenrieth-Rojahn, *Quantitative chemische Analyse* (5:e uppl., utg. av C. A. Rojahn). Th. Steinkopff, Dresden 1931, 283 sid., häft. RM 12: —, bd RM 13: 50.

I fråga om kvantitativ bestämning av rent oorganiskt material står denna handledning kvar på en, om ej direkt föråldrad, så dock något traditionsbunden ståndpunkt, och en jämförelse med t. ex. H. och W. Biltz' nyutkomna, friska och originella *Ausführung quantitativer Analysen* (1930) utfaller icke till den förras förmån. Men därjämte innehåller Rojahns bok ett stort antal analysföreskrifter för droger och farmaceutiska preparat, fetter, oljor och

vatten, vilka givetvis göra den mera mångsidigt användbar. Priset är förvånande lågt.

Ludwig Medicus, *Technisch-chemische Analyse* (3:e uppl., bearb. av H. Töpelmann). Th. Steinkopff, Dresden 1931. 172 sid., pris hft. RM 6: —.

I denna moderniserade omarbetning av en välkänd analytisk handledning ingår som intressant nyhet en viktanalytisk snabbmetod av L. W. Winkler, som med uppoffring av precision söker nedbringa analystiden — för en enkel bestämning av SO_4, Cl o. a., visserligen sedan vissa förberedelser äro gjorda, till ca. 20 min. För övrigt upptar arbetet analysmetoder inom de viktigare grenarna av teknisk kemi. Även denna bok är i förhållande till sitt omfång mycket billig.

G. Starck.

Almanack för alla, 1932. P. A. Norstedt & Söners förlag, 288 sid., kr. 2: 75.

Ur innehållet. J. Neréн, Motorcykeln och dess historia. — Per Geijer, Boliden och övriga malmfynd i Skelleftefälten. En kort orientering, bl. a. inrymmande principerna för den elektriska malmletningen. — B. Lindblad, Det nya Stockholms Observatorium. Byggnaderna och de viktigaste instrumenten beskrivas och illustreras.

Gradualavhandlingar.[1]

Osvald Lundquist, *Experimentelle Studien über das K-Röntgenemissionsspektrum des Schwefels,* Lund 1931, 79 sid., 2 pl. Disp. i Lund 26 maj 1931. Opponenter: docent Axel E. Lindh och fil. mag. Börje Svensson.

Experimentella undersökningar över grundämnenas röntgenspektra utförda under det sista decenniet ha visat, att dessa spektra ej, som man tidigare antagit, framställa en rent atomistisk egenskap hos den emitterande eller absorberande atomen utan, åtminstone hos de lättare elementen, röna inflytande av den kemiska förening, i vilken atomen ifråga ingår.

Den av förf. utförda undersökningen avser att lämna bidrag till kännedomen om den kemiska bindningens inflytande på svav-

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

lets K-röntgenemissionsspektrum och omfattar dels β-spektret och dels $\alpha_1\alpha_2$-dubletten.

Den i första delen av arbetet använda försöksmetoden, den s. k. primärmetoden, är den som hittills så gott som uteslutande kommit ifråga, då det gällt att erhålla ett elements röntgenspektrum: substanserna ha applicerats på antikatoden av ett speciellt för ändamålet konstruerat röntgenrör och bringats att emittera genom elektronbombardement från rörets glödkatod. Utom det fria elementet ha ett flertal föreningar av enklare konstitution (sulfider, sulfit och sulfat) undersökts enligt denna metod. För att söka vinna klarhet i det påfallande inflytande som antikatodmaterialet visat sig utöva på β-linjernas struktur,[1] ha olika metaller (Al, Fe, Ni, Cu, Zn och Ag) använts som antikatodmaterial.

Vid den nu utförda undersökningen har beträffande α-dubletten intet inflytande av antikatodmaterialet kunnat konstateras. β-linjerna däremot förete alltefter det använda antikatodmaterialet och den emitterande substansen ofta stora olikheter i läge och struktur. Sålunda erhållas med det fria elementet å Al-, Fe-, Ni-, Cu-, Zn-, och Ag-antikatoder olika linjestrukturer. De erhållna resultaten tyda på, att det inflytande som antikatodmaterialet visar sig utöva på linjestrukturen i huvudsak beror därpå, att substanserna, genom den starka uppvärmning som elektronbombardementet förorsakar, undergå kemiska omvandlingar på antikatoden. Sålunda kan den olika linjestruktur som det fria elementet ger på de olika antikatoderna förklaras därav, att svavlet under elektronbombardementet bildar sulfid med antikatodmaterialet. De sex olika linjestrukturerna skulle därför vara att hänföra till respektive metallsulfider.

Arbetets senare del bygger på den s. k. sekundärmetoden, där substanserna bringas att emittera genom bestrålning med röntgenljus. Avsikten härmed har varit att bli kvitt den nämnda temperatureffekten. De uppnådda resultaten visa även ledes, att åtskilligt större klarhet i den kemiska bindningens inverkan på röntgenemissionsspektra kan vinnas med denna försöksmetod.

Kataloger m. m.

A/B Rudolph Grave. Firman har utsänt diverse nya prislistor. I nr 12 beskrives en fyrtakt-bensinmotor med fullständig teknisk utrustning, lätt isärtagbar för demonstration. Cylindervolym 170 cm³, 8 000 varv pr min.; effekten, som kan bestämmas genom

[1] Tidigare konstaterat av LINDH och förf.

bromsning, är ca 7 hkr. Vid Östermalms läroverk i Stockholm, som inköpt ett ex., finner man den fungera utmärkt och motsvara fordringarna på en god demonstrationsapparat. Man väntar sig även få god nytta av den vid det enskilda arbetet i fysik.

Prislistan nr 16 upptar en rikhaltig förteckning på meteorologiska instrument, bl. a. såsom nyhet den i tidskriftens septembernummer beskrivna vindmätaren enligt Östman.

Pfeiffers beprövade, motordrivna oljeluftpumpar i nya modeller, med tillbehör och biapparater, beskrivas i lista 13.

Lista 16 är ett komplement till firmans större katalog över fysikaliska instrument. Man finner här bland elektriska mätinstrument *Pyes* utmärkta galvanometrar, *Siemens* pålitliga Z-instrument (amp., volt, watt) och Wulfs mångsidigt användbara dubbeltrådselektrometer. De av *Spindler & Hoyer*, Göttingen tillverkade apparaterna enl. Pohl (beskrivna i hans »Einführing in die Elektrizitätslehre») lagerföras av firman och kunna erhållas, om hänvisning göres till sida och figur i detta arbete. — En universaltransformator enl. Roller och Pricks (»Schulversuche zur Elektrizitätslehre») är ett mycket behändigt hjälpmedel vid alla växelströmsförsök. — En termostapel, beskriven av H. Witt i denna tidskr. årg. 13, sid. 225, förtjänar att uppmärksammas; i förhållande till sitt pris är nog denna termostapel den känsligaste man för närvarande kan erhålla.

P. A. Norstedt & Söners Skolmateriellavdelning. I *Ny Undervisningsmateriell*, 1931, nr 6 redogör rektor C. G. Hellsten för en metod (prövad vid Falu folkskoleseminarium) att inlära bråk- och procenträkning med hjälp av en cirkelskiva och en måttlinjal, båda på lämpligt sätt indelade, så att bråkdelar (upp till 12-delar) av periferi och längd lätt kunna avsättas. För svarta tavlan ha konstruerats en linjal av 120 cm längd och en cirkelskiva med 35 cm diameter och för eleverna små cirkelskivor av celluloid med 7 cm diameter.

Utom bråkindelningen, som kommer väl till pass vid konstruktion av regelbundna månghörningar, finnes på skivorna även vanlig gradindelning, 0° — 360°. De lämpa sig därför synnerligen väl för geometriundervisningen och äro ej dyrare än vanliga gradskivor; pr st. kosta de större kr. 3:50, de mindre kr. 0:50.

I meddelandet beskrives även rumstermometrar med på långt avstånd, tack vare prismatiskt förstorande termometerrör, synlig vätskepelare.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

461) *AB och AC äro två lika långa kordor i en cirkel. Drag en tangent till cirkeln så, att den del av tangenten, som begränsas av BA:s och AC:s förlängningar delas mitt itu i tangeringspunkten.* *X.*

462) *Drages en parameter i en viss ellips, delas ellipsens yta i förhållandet 1 : 3. Beräkna excentriciteten på* 0,001 *när.* *X.*

463) *Cirkelbågarna AMB och ANB ligga på samma sida om AB. Cirkeln C tangerar båda. Beräkna den största vinkel, under vilken C synes från någon punkt på AB, då den större bågens gradtal är* α *och den mindres* $360° - \alpha$. *X.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

464) Lös ekvationen $(\sin x + \cos x)^4 = \sin 4x + \cos 4x$.

Svar: $x_1 = n \cdot 90°$

$x_2 = -56°{,}32 + n \cdot 180°$.

465) Lös systemet $\left.\begin{aligned} x - y &= 8°{,}13 \\ tg\, x \cdot tg\, y &= 1\tfrac{1}{8} \end{aligned}\right\}$

Svar:

x	$53°{,}13$	$-45°$	$+n \cdot 180°$
y	$45°$	$-53°{,}13$	$+n \cdot 180°$.

466) I en likbent triangel är basen = 8 cm. Avståndet från den inskrivna cirkelns medelpunkt till höjdernas skärningspunkt är = 1 cm. Beräkna triangelns yta.

Svar: $21\frac{1}{8}$ eller 38,4 cm².

467) Bottenytan till en pyramid med toppen i O är en kvadrat $ABCD$ med sidan $= 4a$. Höjden är $= a$, och dess fotpunkt delar

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 472—480 äro insända av teknolog H. JANSSON, Södertälje; uppg. 481—483 av X.

diagonalen AC, från A räknat, i förhållandet 1 : 3. Beräkna vinkeln mellan planen OAB och OAD.

Svar: 120°.

468) En parallellt stympad kons bottenradier äro 1 cm och 2 cm. Mantelytan är $\frac{1}{7}$ av ytan till den sfär, som tangerar såväl den mindre basytan som manteln. Angiv förhållandet mellan den stympade konens och sfärens volymer.

Svar $\frac{1}{12}$.

469) Mantelytan av en parallellt stympad kon med höjden 2 cm är dubbelt så stor som ytan av en sfär med radien 1 cm. Förhållandet mellan konens och klotets volymer är 3,5. Angiv basradierna.

Svar: $\sqrt{2}+1$ och $\sqrt{2}-1$ cm.

470) En regelbunden pyramid med kvadratisk basyta skall delas mitt itu med ett plan lagt genom en av baskanterna. Visa, att detta plan skär två sidokanter enligt »gyllene snittet».

471) För ett likbent parallelltrapets $ABCD$ med de parallella sidorna AB och CD äro hörnens koordinater; A (0; 0), B (a; b), D (0; $-b$). Angiv koordinaterna för C.

Svar: $\frac{a(a^2+3b^2)}{a^2+b^2}$; $\frac{2b^3}{a^2+b^2}$.

472) För vilket a-värde har ekvationen $4x^3-25x^2+28x+a=0$ två lika rötter?

Svar: $a_1=\frac{147}{4}$; $a_2=-\frac{236}{27}$.

473) Lös systemet

$$\left.\begin{aligned} xyz+x^3&=27\\ xz+y^2&=9\\ x+z&=6\end{aligned}\right\}$$

Svar:

x	3	-1	$\frac{3}{4}\mp\frac{i}{4}\sqrt{63}$
y	0	-4	$\frac{9}{4}\pm\frac{i}{4}\sqrt{63}$
z	3	7	$\frac{21}{4}\pm\frac{i}{4}\sqrt{63}$

474) En liksidig triangel har ett hörn i punkten (5; 3) och motsvarande bas på linjen $2x+y-8=0$. Hur stor är dess yta?

Svar: $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

475) Ett par av stor- och lillaxelns ändpunkter i en ellips äro resp. A och B, ena brännpunkten F och medelpunkten O. Halva storaxeln delas i F enligt gyllene snittet, om $\angle BFO = \angle ABO$.

476) Beräkna storleken av den yta, som begränsas av kurvorna $y = (2x)^2$ och $y^2 = 2x$.

Svar: $\frac{1}{6}$.

477) En rektangels sidor äro a och b. Varje hörn i rektangeln tages till medelpunkt för ellipser med a och b till halvaxlar. Hur stor är ytan av a) den fyrhörning, som bildas, om ellipsernas skärningspunkter med varandra inuti rektangeln sammanbindas b) den i rektangelns mitt belägna, av ellipsbågar begränsade figur, som har sina hörn i nyssnämnda skärningspunkter.

Svar: a) $ab(2 - \sqrt{3})$; b) $ab\left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}\right)$.

478) En pendel består av en stång (längd = 5 dm) fästad i medelpunkten till en rät, liksidig cylinders övre yta (radie = 1 dm) och vinkelrätt mot denna. Pendeln roterar kring stångens andra ända, så att stången ständigt befinner sig i samma plan. Hur stor volym alstrar därvid cylindern?

Svar: $\frac{148\,\pi}{3}\,dm^3$.

479) Genom en upprättstående blomkrukas bottenhål (vilket är mycket litet) har man trätt ett snöre, på vilket man gjort en knut så stor, att den ej går genom hålet. Krukan hänges upp i snöret, varvid dess övre kant kommer att ligga an mot snöret, som antages vara så styvt att det därvid ej böjes. Hur stor volym har den kropp, som blomkrukan alstrar, då den roterar kring snöret som axel? Blomkrukan har formen av en stympad kon med höjden = 16 cm och radierna 12 och 8 cm.

Svar: $\frac{73\,984\,\pi}{15}\,cm^3 = 15{,}5\ l$ (approx.).

480) Från en klippavsats, 3,4 m ovanför den horisontella marken, uppmätte man vinkeln mellan syftlinjerna till toppen och foten av ett träd och fann den vara 18°,6. Från en punkt på marken, 1 m närmare trädet, fann man även nämnda vinkel (alltså höjdvinkeln till trädtoppen) vara 18°,6. Beräkna trädets höjd.

Svar: 29,3 m.

481) Om talen r, s, t äro i aritmetisk serie, så gäller detsamma om talen $r(-r+s+t)^2$, $s(r-s+t)^2$, $t(r+s-t)^2$. Visa detta.

482) Beräkna summan av alla hela positiva tresiffriga tal, som varken innehålla 2 eller 3 som faktor.

Svar: 164 700.

483) Man har två aritmetiska serier: $t_1, t_2, t_3, \ldots$ med summorna $s_1, s_2, s_3 \ldots$ och $T_1, T_2, T_3 \ldots$ med summorna $S_1, S_2, S_3 \ldots$ Om för alla n

$$\frac{s_n}{S_n} = \frac{2n-8}{137-3n},$$

ha serierna en gemensam term med samma nummer i båda. Vilket är detta nummer?

Svar: 15.

Lösningar till uppg. 428—431.

428) *Två koncentriska sfärer med gemensam medelpunkt C äro givna. Man betraktar en variabel sfär O, som har sin medelpunkt på en fix gemensam diameter till de givna, råkar båda dessa och delar området mellan dem mitt itu. Visa, att sfären O ständigt (går genom) innehåller en viss cirkel.* X.

Lägg ett rätvinkligt axelsystem med origo i C och x-axeln genom O. Beteckna de koncentriska sfärernas radier med r_1 och r_2, den variabla sfärens radie med R, x-koordinaten för O med a, den mellan de tre sfärerna belägna volymen med $V(r)$. Lägg vidare med C som medelpunkt två koncentriska sfärer med radierna r och $r + dr$ $(r_1 > r > r_2)$, så fås som uttryck för volymelementet

$$dV = 2\pi r(r - r\cos v)\,dr,$$

där $2v$ = meridianbågens medelpunktsvinkel. Enligt costeoremet fås

$$R^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos v,$$

varav

$$\frac{dV}{dr} = \frac{\pi r}{a}(R^2 - a^2 - r^2 + 2ar)$$

och

$$V(r) = \frac{\pi}{a}\int_{r_2}^{r_1}\left((R^2 - a^2)\,r + 2ar^2 - r^3\right)dr =$$

$$= \frac{\pi}{a}\left[\frac{(R^2 - a^2)(r_1^2 - r_2^2)}{2} + \frac{2a}{3}(r_1^3 - r_2^3) - \frac{r_1^4 - r_2^4}{4}\right].$$

Sätt nu $V(r) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}(r_1^3 - r_2^3)$, så fås $R^2 - a^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}$,

vilket visar, att sfären O ständigt råkar y-axeln i två fixa punkter och sålunda innehåller en cirkel med radien $= \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}}$.

X.

429) *Sammansättningen hos en blandning av två vätskor A och B (spec. vikt a och b resp.; $a > b$) kan angivas antingen medelst antalet volymprocent (v_A), som utgöres av A, eller medelst antalet viktprocent (m_A), som utgöres av A. Visa, att $m_A - v_A$ är maximum, då $m_A = v_B$ och $v_A = m_B$. Man förutsätter, att vätskorna blandas utan kontraktion.* X.

Om blandningens spec. vikt sättes $= s$ och volym $= 100$, så fås

$$m_A \,.\, s = a \,.\, v_A \text{ och } (100 - m_A) \,.\, s = b\,(100 - v_A),$$

varur $$m_A = 100 \cdot \frac{a\,(s-b)}{s\,(a-b)} \text{ och } v_A = 100 \cdot \frac{s-b}{a-b}.$$

Funktionen $m_A - v_A = \frac{100}{a-b}\left(a + b - s - \frac{ab}{s}\right)$ får sitt maximum för $s = \sqrt{ab}$, då $m_A = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ och $v_A = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Löst av *B—r* och *E—d S—n*.

430) *O är centrum, F ena brännpunkten och l ena asymptoten till en hyperbel. P är en punkt på hyperbeln; FP skär l i Q. Konstruera en sträcka, vars längd är det gränsvärde, till vilket längden av PQ närmar sig, då P längs en av de till l hörande kurvdelarna försvinner till oändligheten.* X.

Drag parallellt med l från F en linje, som skär kurvan i P_1 och den andra asymptoten i Q_1. Det gäller att söka P_1Q_1. Drag tangenten i P_1, som skär l i M och tillämpa satsen: Om från en punkt M tangenter MP_1 och MP_2 dragas till ett kägelsnitt med fokus i F, så är FM bissektris till $\angle P_1FP_2$. I vårt fall blir $\angle P_1FM = 90°$, varav $FM = b$ och $OM = a$ samt $P_1Q_1 = \frac{a}{2}$. X.

Även löst av *B—r* och *E—d S—n*.

431) *T är ytan av en triangel med sidorna a, b och c. T_0 är ytan av den triangel, som har sina hörn i den inskrivna cirkelns kontaktpunkter. T_a, T_b och T_c ha motsvarande betydelse för de vid a, b och c vidskrivna cirklarna. Visa, att $T_a + T_b + T_c - T_0 = 2T$.* X.

Sidorna i T_0 äro $2(p-a)\sin\frac{A}{2}$, $2(p-b)\sin\frac{B}{2}$ och $2(p-c)\sin\frac{C}{2}$. Sammanställas två uttryck för den kring T_0 omskrivna cirkelns radie, fås

$$\frac{T}{p} = \frac{2(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{T_0} \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

vilket ger $T_0 = 2T \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

Sidorna i T_a äro $2p\sin\frac{A}{2}$, $2(p-b)\cos\frac{C}{2}$ och $2(p-c)\cos\frac{B}{2}$. Man får då på liknande sätt

$$\frac{T}{p-a} = \frac{2p(p-b)(p-c)}{T_a}\cdot\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

och alltså $T_a = 2T\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$. För T_b och T_c fås analoga uttryck.

Sammanställning ger nu

$$T_a + T_b + T_c - T_0 = 2T\Big(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} +$$

$$+ \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\Big) =$$

$$= 2T\Big(\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2}\Big) = 2T\sin\frac{A+B+C}{2} = 2T.$$

V. S. B.

B—r. Även löst av *E—d S—n.*

Pristävlan.

Utgivarna av *Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi* inbjuda härmed eleverna vid de högre allmänna läroverken och med dem likställda enskilda läroanstalter till en pristävlan. Det gäller att så fullständigt och vackert som möjligt lösa minst tre av nedanstående matematiska uppgifter.

Tävlingsskrift skall insändas till redaktionen, Karlbergsvägen 16[IV], Stockholm, senast den 1 juli 1932 och vara försedd med vederbörande författares namn, ålder, skola, klass och bostadsadress. Framställningssättet bör vara klart. De uppställda ekvationerna böra motiveras och tydliga figurer bifogas.

Tävlingstiden är utsträckt så långt, för att de som av förberedelsen till studentexamen äro förhindrade att utföra arbetet i vår, må kunna göra det efter examen. Berättigade att deltaga äro således även de våren 1932 nyblivna studenterna.

Herrar lärare ombedjas rikta sina elevers uppmärksamhet på denna tävlan. Särtryck av uppgifternas lydelse, att utdelas bland eleverna, kunna erhållas från redaktionen.

De bästa lösningarna belönas med pris av följande värde:

Första priset kronor 120:—
Andra » » 80:—
Tredje » » 40:—
Därjämte några extrapris.

Första priset, skänkt av Svenska Astronomiska Sällskapet, utgöres av *Populär Astronomisk Tidskrift*, samtliga t. o. m. 1931 utkomna, 12 årgångar.

Andra priset, skänkt av en av Tidskriftens gynnare, utgöres av bokverk, som vinnaren fritt får välja bland arbeten, utgivna å Albert Bonniers förlag.

Tredje priset utgöres av *Tidskrift för elementär matematik* etc. årg. 11—15 (1928—1932), inbundna i förlagsband.

Extraprisen utgöras av *Tidskrift för elementär matematik* etc. årg. 1932.

Uppgifter.

1. Två regelbunda 8-hörningar med sidan s placeras så, att vardera har ett hörn i den andras centrum. Hur stor är den yta som 8-hörningarna ha gemensam?

2. Bestäm de positiva vinklar $< 90°$, vilka satisfiera ekvationen

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16}.$$

3. I en triangel är en vinkel α; ρ_i och ρ_u äro radier i två cirklar, som tangera α:s båda vinkelben och därjämte den kring triangeln omskrivna cirkeln resp. innantill och utantill. Uttryck ρ_i som funktion av enbart α och r, ρ_u som funktion av enbart α och r_a, där r är radien i den i triangeln inskrivna cirkeln och r_a radien i den i α:s vinkelfält belägna vidskrivna cirkeln. Visa även, hur man genom konstruktion kan erhålla dessa cirklars medelpunkter.

4. Ett klot »genomborras» av ett obegränsat prisma, vars tvärsnitt är en kvadrat med sidan a. Prismats axel går genom klotets medelpunkt, och a är lika med kantlinjen hos den i klotet inskrivna kuben. Hur stor volym har den del av klotet, som ligger utanför prismat?

Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna H. T. 1931.

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

(1905 års läroverksstadga.)

1. I ett likbent parallelltrapets äro de parallella sidorna respektive 100 och 90 cm. Var och en av de spetsiga vinklarna är 79°,5. Beräkna diagonalernas längder.
2. Två rätvinkliga trianglar ha gemensam hypotenusa. Skillnaden mellan kateternas längder är för den ena triangeln 9 dm och för den andra 13 dm. Summan av de båda trianglarnas ytor är 90 dm^2. Hur stora äro kateterna i de båda trianglarna?
3. I en rätvinklig triangel, i vilken kateterna äro 21 cm och 28 cm, har man inskrivit tvenne lika stora cirklar så, att vardera cirkeln tangerar hypotenusan och en katet. Dessutom tangera cirklarna varandra. De punkter, där cirklarna tangera hypotenusan, dela denna i tre delar; beräkna dessa delar.
4. Ytan av en triangel är 924 cm^2. Två av triangelns höjder äro respektive 28 cm och 52,8 cm. Undersök, hur många dylika trianglar finnas, och bestäm vinkeln mellan de sidor, mot vilka de nämnda höjderna äro dragna.
5. En fyrsidig pyramid har till bas en kvadrat med sidan a. Pyramidens topp ligger rakt över basytans mittpunkt på avståndet h från denna. Bestäm läget av den punkt, som ligger lika långt från pyramidens alla hörn.
6. I en geometrisk serie, vars termer äro positiva tal, är summan av första och femte termerna 97 samt summan av kvadraterna på andra och fjärde termerna 3492. Vilken är serien?
7. Sidorna i en triangel utgöra andra, tredje och fjärde termerna i en aritmetisk serie med differensen 1 dm. Seriens första term är höjden mot den mellersta sidan. Bestäm sidornas längder.
8. Bestäm maximi- och minimipunkterna samt asymptoterna till kurvan

$$y = \frac{5x^2 + 8x}{x^2 - 4}.$$

Upprita kurvan i stora drag.

Resultat: 1. 98,75 cm. 2. 16 dm och 7 dm; 17 dm och 4 dm. 3. 15 cm, 10 cm, 10 cm. Exakta uttryck för tangenten för halva spetsvinklarna erhållas antingen medelst första bissektrissatsen eller »cirkelsatsen». 4. Två trianglar med vinklarna 53°,13 resp. 126°,87. 5. På avståndet $\frac{a^2+2h^2}{4h}$ från toppen. 6. Serien är 16, 24, 36, 54, 81 ... eller 81, 54, 36, 24, 16 ... 7. 13 dm, 14 dm, 15 dm. 8. Max. i (—1; 1), min. i (—4; 4); asymptoter äro $x = \pm 2$ och $y = 5$.

(1928 års läroverksstadga.)

1. En cirkelring begränsas av två koncentriska cirklar med radierna 2,356 m och 0,897 m. Hur stor är sidan i en kvadrat, som har lika stor yta som cirkelringen?
2. En skuld på 35 000 kr. likvideras med ränta på ränta under 10 år genom lika stora årliga avbetalningar vid varje års slut. Hur stor blir den årliga avbetalningen, om räntefoten är $5\,{}^1/_2\,\%$?
3. Sök de tal, vilkas logaritmer utgöras av rötterna till ekvationen

$$2x^2 + 3x^3 = \frac{2x}{3}.$$

4. En spiralformig kroklinje är bildad av 20 stycken halvcirkelbågar. Den innerstas diameter är 2 mm, och varje följandes diameter är 1 mm längre än den närmast föregåendes. Beräkna spiralens längd.

Uppgifterna 5, 6, 7 och 8 utgjordes av uppg. 1, 2, 3, 4 i ovanstående skrivning enligt 1905 års stadga.

Resultat: 1. 3,862 m. 2. 4 644 kr. 3. 1; 1,754; 0,1228. 4. $115\pi = 361{,}3$ mm.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

1. En studerande fick vid början av vart och ett av sina fem studieår låna 2 000 kr. på följande villkor. Under studietiden var han befriad från alla inbetalningar av kapital och ränta. De fem följande åren skulle han årligen vid årets slut betala 500 kr. Därefter skulle han vid varje års slut inbetala en viss summa, vilken bestämdes så, att skulden var betald efter ytterligare tio år. Hur stor var denna summa? Långivaren beräknade 5% ränta på ränta.
2. Bestäm alla system av värden på x, y, z, som satisfiera ekvationssystemet

$$x + y + z = 5$$
$$xy + yz = 4$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 29.$$

3. I cirkelsektorn AOD, där O betecknar cirkelns medelpunkt, är bågen AD en fjärdedel av cirkelns hela omkrets. På bågen AD väljer man två punkter B och C så, att kordan BC blir parallell med kordan AD, och fullbordar femhörningen $OABCD$. Hur stor skall medelpunktsvinkeln BOC väljas, för att femhörningens omkrets skall bli så stor som möjligt?

4. På parabeln
$$y^2 = 8x,$$
vars brännpunkt betecknas med F, har man tagit punkten P så, att brännpunktsradien PF är 6 längdenheter. Genom F drages linjen l så, att det stycke av l, som ligger inom parabeln, delas mitt itu av den genom P gående diametern i parabeln. Sök vinkeln mellan l och PF.

5. Tangenten i en punkt P på ellipsen
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$
råkar koordinataxlarna i punkterna A och B. O är ellipsens medelpunkt. Vid rotation kring x-axeln alstrar triangeln AOB en kon, vars volym varierar med punkten P:s läge. Vilket är det minsta värde denna volym kan uppnå?

6. I tvenne trianglar ABC och $A'B'C'$ äro vinklarna B och B' lika stora samt vinklarna A och A' supplementvinklar. Visa, att mellan trianglarnas sidor råder relationen
$$BC \cdot B'C' = AB \cdot A'B' + AC \cdot A'C'.$$

7. Basytan i en pyramid är en regelbunden sexhörning $ABCDEF$. Höjden från pyramidens topp O mot basytan råkar denna i dess medelpunkt och är dubbelt så stor som sexhörningens sida. Beräkna cosinus för vinkeln mellan de plan, som innehålla sidoytorna OAB och OCD.

8. En cirkel med medelpunkten M och radien r samt en punkt O på avståndet $MO = 2r$ från M äro givna. Man uppritar liksidiga trianglar OAB, som ha ett hörn i O och ett hörn A på den givna cirkeln. Sök orten för det tredje hörnet B.

9. Att konstruera en cirkel, som går genom två givna punkter och skär en given cirkel så, att cirklarnas gemensamma korda blir diameter i den givna cirkeln.

Resultat: 1. 1560 kr. 2.

x	3	-2	$2+\sqrt{10}$	$2-\sqrt{10}$
y	4	4	1	1
z	-2	3	$2-\sqrt{10}$	$2+\sqrt{10}$

3. 30°. 4. 35°,27 (vinkelns tangent $= 1:\sqrt{2}$). 5. $\frac{\pi ab^2\sqrt{3}}{2}$. 6. Kan bevisas medelst sinusteoremet, dock enklare på något av följande sätt. Förminska eller förstora $\Delta A_1B_1C_1$ i skalan $\frac{AB}{A_1B_1} = k$; man får då en triangel med sidorna kA_1B_1 $(= AB)$, kA_1C_1, kB_1C_1, som placeras invid ΔABC så, att sidan AB blir gemensam. »Andra bissektrissatsen» ger $\overline{AB}^2 = AB \cdot kA_1B_1 = BC \cdot kB_1C_1 - AC \cdot kA_1C_1$, o. s. v. Triangeln $A_1B_1C_1$ kan även förändras i skalan $\frac{AC}{A_1C_1} = k$ och placeras på ABC med AC som gemensam sida. Härvid erhålles ett likbent parallelltrapets, på vilket Ptolemeiska satsen tillämpas. 7. $\cos v = \frac{5}{19}$. 8. Punkterna A överföras tydligen i punkterna B genom en vridning av 60° kring O som vridningscentrum, varför orten blir *två cirklar*, vardera med radien r och medelpunkten på lika avstånd $(= 2r)$ från O och M.

Analytiskt kan uppgiften lösas på följande sätt. Tag O till origo och OM till x-axel. En variabel liksidig triangel OBA har hörnet A på cirkelperiferien. Punkten B:s polära och rätvinkliga koordinater betecknas med resp. ρ och θ, x och y. Tillämpas cosinusteoremet på ΔOAM, erhålles $r^2 = \rho^2 + 4r^2 - 4\rho r \cos(\theta - 60°)$ eller $\rho^2 + 3r^2 - 4r(\rho \cos\theta \cdot \cos 60° + \rho \sin\theta \cdot \sin 60°) = 0$. Men $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\rho \cos\theta = x$, $\rho \sin\theta = y$, varav $x^2 + y^2 - 2rx - 2ry\sqrt{3} + 3r^2 = 0$ eller $(x - r)^2 + (y - r\sqrt{3})^2 = r^2$. 9. Löses medelst en »hjälpcirkel», som skär den givna cirkeln och går genom de givna punkterna. Se t. ex. CASSELS geom. anteckningar.

Uppgifter i fysik.

(1905 års läroverksstadga.)

1. En homogen, jämntjock stång AB av 6 kg vikt och 1 m längd är upphängd under en fix punkt C medelst tvenne snören AC och BC, vardera fästat med den ena änden i C och med den andra i var sin ände av stången AB. AC är 6 dm och BC 8 dm. Hur stor är spänningen i snöret AC, då stången intagit

sitt jämviktsläge under tyngdens inverkan? Snörenas vikt lämnas utan avseende.

2. Vid en järnväg av 1,435 m spårvidd finnes en kurva med 500 m radie. Man önskar, att ett tåg skall kunna framföras i denna kurva med en hastighet av 15 m/sek och att det resulterande trycket mot banvallen därvid skall vara vinkelrätt mot planet genom skenorna. Hur mycket högre bör den yttre skenan ligga än den inre? Tyngdkraftens acceleration är 9,81 m/sek^2.
3. En luftmassa är vid 39° C mättad med vattenånga. Blandningens volym är 1 m^3 och dess totala tryck 760 mm. Gasblandningen avkyles långsamt till 5° C, varvid volymen samtidigt minskas, så att trycket förblir 760 mm. Beräkna vikten av det vatten, som därvid utfälles. Volymsutvidgningskoefficienten är $^1/_{273}$. 1 m^3 torr luft väger vid 0° C och 760 mm 1,293 kg. Vattenångans specifika vikt i förhållande till luft är $^5/_8$. Dess maximitryck är vid 39° C 52,4 mm, vid 5° C 6,5 mm.
4. Tvenne lika långa strängar, *A* och *B*, av samma material och med samma diameter äro vardera spända med 10 kgf och giva således samma ton. Strängen *A*, vars spänning ändras, skall medelst ett stall delas i tvenne delar, så att dessa delar tillsammans med *B* giva durtreklangen. *B* skall härvid giva grundtonen och de båda delarna av *A* tersen och kvinten. Var skall stallet placeras och hur måste spänningen i *A* ändras?
5. För att bestämma brytningsindex för en planparallell glasplatta med *d* mm tjocklek anbragte man en liten färgfläck på dess ena yta, lade plattan med färgfläcken uppåt på objektbordet till ett mikroskop, inställde först skarpt på fläcken och sedan på dess spegelbild i den andra ytan. Mikroskopet måste mellan dessa inställningar förskjutas *h* mm. Hur stor var brytningsindex?
6. En deklinationsnål gör 13 svängningar i minuten under inverkan av enbart jordmagnetismen. En stavmagnet placeras norr om nålen med sin längdriktning i norr—söder och sin nordände åt söder. Nålens nordände pekar då fortfarande åt norr, och nålen gör, om den bringas att svänga, 7 svängningar i minuten. Hur många svängningar gör nålen i minuten, om stavmagneten i stället lägges på samma avstånd från nålen söder om denna i den magnetiska meridianen med sin nordände i detta fall åt norr? I de båda fallen ligga nålen och stavmagneten i samma horisontalplan.
7. Strömmen från ett elektriskt batteri går genom tvenne i serie kopplade motstånd *R* och r_1, det senare på 0,1 ohm. Mellan ändpunkterna av motståndet *R* anslutes en grenledning, bestå-

ende av två i serie kopplade motstånd, $r_2 = 10\,000$ ohm och $r_3 = 127$ ohm. Man mäter spänningen mellan ändpunkterna av motstånden r_1 och r_3 och finner för motståndet r_1 en spänning av 1,017 volt och för motståndet r_3 en spänning av 1,018 volt. Beräkna effekten i motståndet R.

8. Redogör för FIZEAUS eller FOUCAULTS metod för bestämning av ljusets hastighet.

Resultat: 1. 3,6 kgf. 2. 66 mm. 3. 43,08 g. 4. Stallet placeras, så att strängen delas i förh. 5 : 6. Den nya spänningen = 4,65 kgf. 5. $\frac{2d}{h}$. 6. 17 svängningar per minut. 7. 825 W.

(1928 års läroverksstadga.)

Uppgifterna 1—7 utgjordes av uppg. 1—7 i ovanstående skrivning enl. 1905 års stadga.

8. En enfastransformators primära spole är förbunden med polerna till en växelströmsgenerator. Spänningen mellan den primära spolens ändpunkter är 110 volt, strömstyrkan i spolen 3 amp. och fasförskjutningen mellan strömstyrka och spänning 15°. Den sekundära spolen är sluten genom ett motstånd utan självinduktion. Strömstyrkan i denna spole är 0,6 amp. och spänningen mellan spolens ändpunkter 490 volt. Beräkna transformatorns verkningsgrad, d. v. s. förhållandet mellan den effekt, som transformatorn avger på sekundärsidan, och den effekt, som tillföres transformatorn på primärsidan. Alla uppgifter på strömstyrka och spänning gälla effektivvärdet.

Resultat: 8. 92,2%.

Realskolexamen H. T. 1931.

Provräkning.

1. Lös ekvationen

$$\frac{x-2}{147x^2-3} - \frac{48}{7x+1} + \frac{89}{14x-2} = 0.$$

2. En handlande hade åsatt en vara ett pris, som skulle giva honom 20% vinst. Vid realisation sålde han den till inköpspris. Hur många procents rabatt motsvarade detta?
3. Ett bråks värde är $\frac{4}{5}$. Bråket förkortas med 3, varefter det nya

bråkets täljare ökas med 10, dess nämnare med 14. Det så bildade bråkets värde är $\frac{3}{4}$. Sök det först nämnda bråket.

4. Ett schaktningsarbete beräknades kräva 420 fullgoda dagsverken. Arbetet utfördes emellertid som nödhjälpsarbete av 20 personer, vilkas arbetshastighet i medeltal blott var $\frac{3}{4}$ av en yrkeskunnig, fullgod arbetares. Hur lång tid tog arbetet, och hur många procent blev fördyringen, om de anställda erhöllo samma avlöning, som yrkeskunniga arbetare skulle fått?
5. En person har 10 000 kr. placerade i inteckning i ett hus mot 6% ränta. Han säljer inteckningen för 10 000 kr. och köper 35 st. aktier å nominellt 100 kr. per styck till ett pris av 140 kr. per aktie samt placerar resten av pengarna i 5-procents statsobligationer, som han köper till 102% kurs. Hur många procents utdelning måste han minst få på aktierna, för att hans ränteinkomster icke skola minskas genom omplaceringen?
6. I triangeln ABC dragas bissektriserna till vinklarna A och B. De råka varandra i punkten O. Vinkeln AOB är v. Bevisa, att vinkeln ACB är $2v - 180°$.
7. Genom ändpunkten A av diametern AB i en cirkel är en tangent dragen, genom den andra B en korda BC, vilkens förlängning CD råkar tangenten i D. Bestäm ytorna av trianglarna ABC och ABD, då $CD = 3BC$ och $AB = 10$ cm.
8. Hos en på en lastbil placerad cistern har var och en av de lodräta ändytorna formen av en cirkel, från vilken man (upptill och nedtill) genom vågräta och således parallella kordor av radiens längd bortskurit tvenne segment. Beräkna cisternens rymd, då ändytornas höjd är 6 dm och cisternens längd är 2,5 m. ($\pi = 3{,}14$.)

Resultat: 1. 3,8. 2. $16\frac{2}{3}$ %. 3. $\frac{24}{30}$. 4. 28 dagar; $33\frac{1}{3}$ %. 5. 10 %.
7. $\Delta\ ABC = 12{,}5\sqrt{3} = 21{,}65$ cm²; $\Delta\ ABD = 50\sqrt{3} = 86{,}60$ cm².
8. $50(\sqrt{27} + 4\pi) = 888$ l.